Pedro da Cruz Almeida
Mestre em Educação Matemática
na Educação Pré-Escolar e nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico

Formulação de problemas:
um estudo com alunos dos 3.º e 4.º anos

Dissertação para obtenção do Grau de Doutor em
Ciências da Educação – Teoria e desenvolvimento curricular

Orientador: Prof. Dr. António Manuel Dias Domingos
Professor Auxiliar da FCTUNL
Coorientadora: Prof. Dra. Maria Cecília Soares de Morais Monteiro
Professora Coordenadora na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

Juri:

Presidente: Prof. Dra. Elvira Júlia Conceição Matias Coimbra, Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Arguentes: Prof. Dra. Maria da Conceição Monteiro da Costa, Professora Coordenadora Jubilada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

Prof. Dra. Maria Isabel Piteira do Vale, Professora Coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo

Vogais Prof. Dr. Francisco José Brito Peixoto, Professor Auxiliar do Instituto Universitário de Ciências Psicológicas, Sociais e da Vida – ISPA

Prof. Dr. António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Prof. Dra. Ana Elisa Esteves Santiago, Professora Adjunta Convidada da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2018

Agradecimentos

A conclusão de um trabalho que muito esforço nos custou, mas que muito desejámos, suscita-nos um sentimento de alegria inseparável de um sentimento de enorme gratidão por todos os que ajudaram. Sentimo-nos em dívida e a todos queremos dizer “obrigado”, palavra que usamos para agradecer, mas que exprime o compromisso de retribuir a ajuda que nos foi prestada. Agradeço em primeiro lugar aos meus orientadores, ao Prof. Dr. António Domingos e à Profª. Dra. Cecília Monteiro, pelo incentivo, a orientação, a pronta disponibilidade a qualquer solicitação, a discussão das ideias e o esclarecimento das dúvidas. Agradeço a todas e todos os que tiveram paciência e disponibilidade, com quem também partilhei ideias e dúvidas, com quem as discuti às vezes em longas horas… à Graciosa Veloso, à Florinda Costa, à Joana Castro, à Isabel Madureira,… embora quisesse, não é possível deixar aqui o nome de todos e todas as colegas com quem trabalhei e cresci, mas se alguma vez lerem isto saberão quão estou agradecido. Agradeço à professora e alunos e alunas que me receberam nas suas aulas para o trabalho de campo, em especial aos e às que pacientemente estiveram horas em conversa comigo e a quem devo, apetece-me dizer “todo” este trabalho. O tema aqui desenvolvido vive comigo desde que fui aluno. À professora Alice Guimarães, minha professora de Psicologia no Magistério Primário de Aveiro, com quem partilhei a ideia de que seria possível deixar aos alunos o trabalho de fazer as perguntas, e que não hesitou em a pôr em prática, melhor do que eu o consegui fazer em muitos anos; deixo-lhe aqui não só o agradecimento, mas o sentimento de saudade. Agradeço profundamente à minha esposa, filhas e filhos que me ajudaram neste trabalho e a quem devo todo o tempo que passei mais na escola do que em casa. Por último, mas não por isso, há pessoas que nos inspiram, algumas simplesmente personagens de ficção literária, que não vou mencionar, outras realmente presentes no espaço e no tempo: ao Dr. João dos Santos cujas palavras me inspiraram, principalmente na minha vida profissional, e a Jesus Cristo, uma fonte de inspiração pela sua vida questionadora, pela sua mensagem verdadeiramente inteligente e inovadora, pela fé e liberdade que me concede, pelo memorial que me guia, pela vida plena que nele sempre terei.

Resumo

A investigação relatada nesta dissertação procura descrever e compreender o modo como alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade se envolvem na resolução de tarefas de formulação de problemas. Pretende-se identificar processos de formulação de problemas, qual o conhecimento matemático que manifestavam e como o mobilizavam, que relação pode haver entre a formulação de problemas e as características pessoais, como o nível de desempenho escolar, os gostos pelas matérias curriculares e as opiniões sobre a formulação e resolução de problemas.

Para se atingir estes objetivos recorreu-se a uma metodologia interpretativa, qualitativa, na forma de estudo de casos, procurando-se, por meio de entrevistas e observação participante, um conhecimento em profundidade do objeto de estudo, focando-se na perspetiva de quatro alunos durante o tempo em que frequentaram o 3.º ano e o 1.º período do 4.º ano do 1.º Ciclo.

A observação das aulas visou as práticas relativas às atividades de aprendizagem da matemática. As entrevistas em profundidade procuraram a observação dos processos de formulação de problemas, o conhecimento matemático – relativo à multiplicação e divisão – mobilizado em dois tipos de tarefas: a) as que pediam a formulação de um problema que fosse resolvido por uma expressão de cálculo fornecida, b) as que pediam a formulação de perguntas que pudessem ser resolvidas a partir de dados fornecidos num contexto próximo da realidade. O quadro teórico fundamental para a caracterização das tarefas e análise dos dados obtidos empiricamente envolve literatura sobre formulação e resolução de problemas e o conhecimento sobre as estruturas multiplicativas, com enfase na teoria dos campos conceptuais.

O estudo permitiu observar que os alunos usavam essencialmente dois processos de formulação de problemas que tinham a ver com a recordação de situações e a antecipação de resoluções antes da formulação. Os processos e os problemas formulados dependiam do conhecimento que os alunos tinham da multiplicação e divisão, de características pessoais como, o gosto, a opinião sobre a resolução e formulação de problemas e o nível de sucesso escolar.

Palavras-chave: Formulação de problemas, Conhecimento matemático, Estruturas multiplicativas, 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Abstract

The investigation reported in this dissertation aims to describe and understand the way students of grades 3 and 4 embrace the resolution of problem-posing tasks. It intended to identify the problem-posing processes, which mathematical knowledge the students manifested and how they mobilized them in the processes of formulation. It is also sought to observe what relation it there can be between the problems they can pose and personal characteristics, such as classroom performance, appreciation of the curricular subjects as well as the opinions about problem-posing and problem-solving.

To achieve those objectives, an interpretative qualitative methodology was applied, using a design of case studies, seeking by interviews and participant observation, a depth knowledge of the object of study, focusing on the perspective of four students throughout grade 3 until the 1st term of grade 4.

The classroom observation concerned mathematical learning activities. In-depth interviews were focused on the observation of problem-posing processes. The mathematical knowledge concerning multiplication and division was mobilized in two types of tasks: a) formulating a problem that could be solved by a given expression, or, b) posing questions that could be solved from data provided from a context close to the student's reality. The fundamental theoretical framework for task characterization and analysis of the empirically acquired data involved scientific literature about problem-posing and problem-solving and the knowledge about multiplicative structures, with emphasis in conceptual field theory.

The study allowed to observe that students mainly used two processes of problem posing: remember previous situations and the anticipation of solutions afore the formulation. The processes and the problems formulated depended on the knowledge students had on multiplication and division, personal characteristics such has appreciation and opinion about the resolution and formulation of problems and also the level of school accomplishment.

Keywords: Problem-posing, mathematical knowledge, Multiplicative structures, Primary school.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tabelas

1. Introdução

Falar de formulação de problemas, no sentido mais restrito do termo, é falar de investigação em Matemática pura ou aplicada. A Matemática aplicada trata exatamente da resolução de problemas reais pela criação de modelos matemáticos capazes de representar tal situação da realidade e possibilitar soluções, previsão da evolução do problema, etc. Mas tais problemas têm de ser primeiramente formulados do ponto de vista da Matemática. Isto refere-se ao processo de modelação matemática, cujo ponto de partida é uma situação (real), da qual se identificam os aspetos relevantes para a criação de um modelo matemático, seguindo posteriormente para a investigação desse modelo, voltando à situação real e avaliando a adequação do modelo (o ciclo da modelação matemática, cf. Matos, 1995). No âmbito da didática usam-se atividades de modelação matemática para aprendizagem de conteúdos curriculares.

Formular um problema no verdadeiro sentido do termo, isto é, um problema para o qual não se conhece resposta nem processo de resolução, exige do formulador conhecimento matemático, um interesse profundo pela matemática. Há quem diga que é preciso criatividade, mas parece que os matemáticos que inventam tais problemas dizem tratar-se de muito trabalho e persistência.

Nos primeiros anos de escolaridade não se pode falar de formulação de problemas ao nível mais restrito do seu significado, mas sim ao nível de atividades de projeto, de investigações de contexto mais puramente matemático ou mais realista (cf. Ponte, 2005).

Os professores são muitas vezes formuladores de problemas (quando não seguem apenas os do manual), mas formulam problemas que sabem resolver, e que acham que os seus alunos saberão resolver ou, com um pouco mais de conhecimento matemático e sensibilidade didática, chegam a formular problemas para os seus alunos aprenderem conteúdos e não apenas aplicar os que já deviam saber.

Um aluno poderá formular um problema de espontânea vontade, mas acredita-se facilmente que formulará um problema “estereotipado”, quer dizer, como alguns que aparecem nos livros de exercícios ou que os professores podem formular com o mesmo objetivo: praticar. Também pode estar mal formulado, revelar uma conceção errada do conhecimento que o formulador imagina dominar, ou pela falta de rigor do enunciado ou, quem sabe, pode ainda procurar realmente respostas para perguntas ainda não respondidas, que será o caso mais raro.

A formulação de problemas tornou-se um campo de investigação em Educação Matemática, por um lado integrada, como uma estratégia, na resolução de problemas, por outro avançando na procura de algum estatuto de independência, até chegar ao espaço da criatividade.

O objetivo da investigação aqui apresentada procura compreender o modo como alunos dos primeiros anos de escolaridade se envolvem na formulação de problemas, como é que eles mobilizam o seu conhecimento matemático e que relações pode haver com as suas características pessoais, como as suas preferências ou gostos, se realmente gostam de formular problemas, o que é que pensam sobre isso e sobre a resolução de problemas. Trata-se portanto de um objetivo que procura conhecer mais profundamente a formulação de problemas (quanto foi possível) procurando os pontos de vista e de ação dos formuladores que neste caso foram alunos que, enquanto decorreu o trabalho de campo, frequentaram o 3.º ano e o 1.º período do 4.º do ensino básico.

Esta dissertação está organizada em 10 secções principais. A primeira é esta introdução. A segunda faz uma descrição da problemática que enquadra os objetivos e as questões do estudo.

Uma vez que o assunto principal é a formulação de problemas, a 3.ª secção enquadra teoricamente o tema apresentando uma revisão de literatura sobre este campo de investigação, mas incluindo também a resolução de problemas em geral e um tipo particular de problemas que tem sido alvo de investigação, os designados *Word-problems*, que aqui se evita traduzir à letra por "problemas de palavras"[1]. Esta tipologia de problemas merece um destaque especial porque constituem a grande maioria dos problemas propostos nos primeiros quatro anos de escolaridade e cuja resolução rotineira introduz na aprendizagem alguns vícios perniciosos para o desenvolvimento da desejada capacidade de resolução de problemas. Em verdade, as tarefas de formulação de problemas que foram dadas aos alunos participantes neste estudo integram-se dentro categoria dos *word-problems*.

Outro assunto importante no estudo é a necessidade de enquadrar o que se toma por conhecimento matemático. Para este efeito optou-se por estudar a teoria dos campos conceptuais proposta por Gerard Vergnaud, não só porque ela é adequada para a descrição do conhecimento e da sua apropriação pelo sujeito, como também porque um dos campos conceptuais estudados por Vergnaud é o das estruturas multiplicativas. Assim, a 4.ª secção apresenta a teoria dos campos conceptuais e a 5ª seção entra especificamente na problemática da multiplicação e divisão, envolvendo i) a teoria de Vergnaud sobre as estruturas multiplicativas, ii) a teoria veiculada por Judah Schwartz sobre a importância de um ensino da matemática que considere sempre os números associados aos seus referentes e que caracteriza a multiplicação e divisão como operações transformadoras dos referentes, iii) a análise de Brian Greer sobre multiplicação e da divisão enquanto operações que modelam contextos, e que portanto são classificados em função do significado que as operações assumem dentro dos contextos que modelam.

[1] Manter-se-á a designação "*Word-problem*" por não haver em português uma designação curta que faça justiça ao tipo de problemas a que se refere. São problemas com um contexto próximo da realidade quotidiana, ainda que possam envolver elementos fantasiados, descritos em linguagem comum, e que se resolvem por uma ou mais operações conhecidas.

A metodologia seguida na investigação é abordada na 6.ª secção. Justifica-se a opção metodológica, qualitativa, tomando a forma de estudo de casos numa perspetiva instrumental tendo em vista os processos de formulação de problemas usados por alunos criteriosamente selecionados, e apresentam-se os instrumentos de recolha e de análise de dados.

Na 7.ª secção são apresentadas as tarefas de formulação de problemas que foram propostas aos alunos e realizadas em entrevistas individuais. A apresentação das tarefas visa sobretudo explicitar as suas potencialidades do ponto de vista dos dados que se pretendia recolher. Portanto descreve-se também o seu conteúdo matemático e a sua categorização de acordo com o enquadramento teórico da formulação de problemas.

Tratando-se de um estudo de casos, quatro alunos, a apresentação e discussão dos resultados é exposta caso a caso por ordem alfabética dos nomes fictícios atribuídos aos alunos. Para cada caso descrevem-se as características pessoais de cada aluno recolhidas sobretudo numa entrevista realizada em três momentos diferentes, designada "Entrevista Livre" seguindo-se depois os resultados recolhidos em cada uma das outras quatro entrevistas, uma para cada tarefa de formulação de problemas e, por fim, uma síntese do que se considerou essencial para responder às questões do estudo. Cada uma dessas entrevistas toma o nome dado à tarefa. Esta é a 8.ª secção que, em verdade não começa exatamente pela apresentação e discussão dos resultados dos casos, mas pela apresentação das práticas de sala de aula, fruto dos dados recolhidos pela observação das aulas, pelas conversas tidas com a professora e documentação fornecida, dados que foram registados num diário de campo. Começar por aqui é fundamental para se poder entender os resultados obtidos nas entrevistas, pois a descrição das práticas de sala de aula constituem um enquadramento e uma validação dos resultados obtidos nas entrevistas aos participantes.

Na 9.ª secção apresentam-se e discutem-se mais uma vez os resultados, mas numa perspetiva global, evidenciando os resultados do que é particular e comum entre os diversos alunos, dando assim uma visão diferente, mas que aprofunda e acrescenta conhecimento ao que foi obtido em cada aluno. Trata-se portanto de responder às questões da investigação. Esta apresentação é feita tendo em conta a tipologia das tarefas e, portanto, em três partes: sobre os problemas de formulação livre, os problemas de formulação baseada em expressões numéricas e os problemas de formulação baseada em contextos. Termina com as conclusões do estudo.

O encerramento de todo o trabalho realizado está na secção 10. É uma síntese do estudo, propõe novas ideias e suscita questões de investigação na continuidade das respostas conseguidas nesta investigação.

2. Problemática, objetivos e questões

É muito comum fazer referência à publicação *An Agenda for Action*, editada pelo National Council of Teachers of Mathematics em 1980, como sendo o marco a partir do qual a resolução de problemas passou a ser recomendada como o centro do ensino da matemática nos currículos escolares. De facto a primeira recomendação feita nesta agenda é "O currículo de matemática deve ser organizado em torno da resolução de problemas." (pág. 2). Esta recomendação surge, de acordo com o prefácio desta publicação, depois de duas décadas de preocupação sobre o currículo e o (in)sucesso escolar nos Estados Unidos da América. Dentro dessa recomendação, um dos pontos diz:

> Os programas de matemática devem dar aos alunos experiência na aplicação da matemática, na seleção e combinação de estratégias para a situação em questão.
>
> Os alunos devem aprender a:
>
> - formular perguntas-chave;
> - analisar e concetualizar problemas;
> - definir o problema e o objetivo;
> - … (pág. 3)

Verifica-se pois que a competência na resolução de problemas incluía saber fazer perguntas e concetualizar problemas. Em rigor deve entender-se que aqui estava em causa a resolução de problemas reais, algo mais próximo das atividades de modelação matemática.

Aconteceu que na década dos anos 80 aumentou significativamente o número de investigações sobre resolução de problemas. Não é certo que a causa tenha sido a recomendação do NCTM, ou se esta recomendação tenha surgido de investigação já feita sobre o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem em torno da resolução de problemas. O facto é que esta associação é reconhecida a nível internacional e as suas recomendações curriculares são referenciadas frequentemente.

Em Portugal, 10 anos mais tarde, a reforma dos currículos, nomeadamente o currículo de matemática para o 1.º ciclo, cuja primeira edição data de 1990 (DGEBS, 1990), assumiu claramente esta recomendação. Também a Associação de Professores de Matemática traduziu várias publicações chave com orientações curriculares publicadas pelo NCTM. Mas a preocupação pelo sucesso dos alunos na resolução de problemas, aliás, o sucesso em geral, é bastante mais velha.

A publicação mais famosa com preocupações didáticas sobre o modo de ser um bom resolvedor de problemas é o livro "How to solve it" de George Polya, cuja primeira publicação data de 1945. De todo o conteúdo desta obra, o que "todos" sabem citar são as quatro fases da resolução de um problema: a) compreender o problema, b) estabelecer um plano, c) executar o plano e d) avaliar a solução obtida. Menos conhecida é a lista das perguntas que, dizia Polya, um estudante deveria estar munido (saber de cor) para que, colocando-as a si mesmo, frente à situação, conseguisse enfrentar e resolver o problema. Saber interrogar-se era a chave das heurísticas da resolução de problemas.

Parece que desde muito cedo a investigação sobre a resolução de problemas reconheceu de algum modo a relação estreita entre a capacidade de resolver problemas e a de questionar. Num relatório publicado em 1978, feito por Naomi Miyaki e Donald A. Norman, do *Center for Human Information Processing* da Universidade da Califórnia, afirma-se logo de início que

> Fazer uma pergunta sobre algo implica mais do que uma necessidade de informação. Implica também uma estrutura adequada de conhecimento para formular a questão e interpretar a resposta. Assim, a capacidade de uma pessoa pensar em uma questão apropriada sobre um tópico é uma função complexa do conhecimento desse tópico. (pág. 1)

O próprio título deste relatório é muito significativo: "*Para fazer uma pergunta, é preciso saber o suficiente para saber o que não é conhecido*". É necessário dizer que esta investigação não incidiu na resolução de problemas de matemática, mas na resolução de tarefas relacionadas com o jogo do Ouri e a utilização de *software*. Mas o que está em causa, e é de interesse para a investigação que se relata nesta dissertação, é se a formulação de problemas pelos alunos tem ou não cabimento nas estratégias de ensino e aprendizagem, ou se é apenas um acrescento interessante mas pouco significativo em termos da aquisição do conteúdo curricular.

Uma das conclusões a que chega a investigação de Miyaki e Norman (1978), os quais dizem ser a mais interessante, é que as pessoas menos experientes, ou com menor nível de conhecimento sobre um determinado assunto não fazem muitas perguntas sobre matérias mais difíceis. Portanto acrescentam, "uma teoria sobre questionamento que sugira que as pessoas fazem perguntas para preencher as suas estruturas de conhecimento é simplista demais. As pessoas não parecem ser capazes de lidar com material, muito além do conhecimento atual." [ou seja, que já possuem] (pág.16). Esta conclusão coloca em jogo várias interrogações sobre o ensino e a aprendizagem. Uma delas tem a ver com a pertinência da atividade de formulação de problemas no ensino, com muito mais razão quantos mais jovens são os alunos, pois não haveria justificação para fazer atividades em que os alunos não pudessem ir além das estruturas que já possuem. No entanto, num certo sentido, o mesmo se poderia dizer sobre as atividades de resolução de problemas. Não é inédita para os professores a experiência de que os alunos com menor capacidade de acompanhar os estudos têm também mais dificuldade em explicitar claramente as suas dúvidas.

Como já se referiu acima, a reforma curricular do 1.º Ciclo de 1990 (DGEBS, 1990) em Portugal reconheceu que a aprendizagem da matemática deveria passar pela resolução de problemas, atribuindo a esta atividade não a função de testar a aplicação de conhecimentos ensinados, mas a considerá-la veículo da aprendizagem, argumentando que ela era a essência da experiência Matemática.

A segunda edição dos programas curriculares do primeiro ciclo (DEB, 1998) considerava a formulação de perguntas e problemas pelos alunos, mas na área do Estudo do meio e na de Português. O Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (Ponte, Serrazina, Guimarães, Breda, Guimarães, Sousa, Menezes, Martins, & Oliveira, 2007), concedia um espaço próprio para a resolução de problemas, definindo tópicos e objetivos, mas nesse espaço específico destinado à resolução de problemas, no primeiro ciclo, não propunha que os alunos formulassem problemas, mas sim no espaço destinado às finalidades e objetivos gerais da matemática para todo o ensino básico. A implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) foi precedida, desde 2005, por um programa de formação contínua de professores sem precedentes em Portugal. E em 2008, como fruto e para contribuir para esse programa de formação, a Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular publica um livro intitulado *A experiência matemática no ensino básico* (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008), que concede uma secção à formulação de problemas, onde diz que "é uma atividade de importância inquestionável, pois contribui não só para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução." (pág. 27) Esta recomendação para a implementação de atividades de formulação de problemas é acompanhada de sugestões práticas relativamente a estratégias de formulação que se baseavam em alguma literatura de investigação, entre a qual o livro *The art of problem posing* de Marion Walter e Stephen I. Brown cuja primeira edição data de 1990.

Também em português e com caracter didático, publicado no Brasil em 2001, um livro intitulado *Ler escrever e resolver problemas* contém um capítulo dedicado à formulação de problemas *Por que formular problemas?* de Cristiane H. Chica. Outro título surgido no Brasil em 2010 é *Formulação e resolução de problemas: teoria e prática*, de Luiz Roberto Dante. As características destas publicações de caracter didático consideraram a formulação de problemas como uma atividade ligada à resolução de problemas, como uma estratégia de ensino e aprendizagem da resolução de problemas. Em rigor, o que era necessário desenvolver era a resolução de problemas e as atividades de formulação eram (são) boas ferramentas para o efeito.

Entretanto começam a surgir investigações que procuram descobrir aspetos próprios da formulação de problemas. Por exemplo: a definição do conceito "formulação de problemas" (eg. Stoyanova & Ellerton, 1996) e de diferentes categorias de tarefas (eg. Stoyanova & Ellerton, 1996) e categorias de tarefas associadas a processos cognitivos (eg. Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005). Algumas investigações usam a formulação de problemas para avaliar o conhecimento matemático (eg. Barlow & Drake, 2008; Lin, 2004). Muito mais se irá fazer sobre formulação de problemas, encarando-a em si mesma. Surge um caminho de investigação que começa a descobrir que há aspetos específicos da formulação de problemas que valem por si e não são apenas acessórios da resolução de problemas. Não se trata de alcançar uma independência, mas de reconhecer as suas especificidades e, provavelmente, conseguir ver melhor as relações entre a formulação e a resolução de problemas, tanto naquilo que as distingue como no que as liga.

O objetivo da investigação que se apresenta nesta dissertação foi descrever e compreender o modo como alunos dos 3.º e 4.º anoss de escolaridade se envolviam na resolução de tarefas de formulação de problemas. Neste sentido foram tidas em conta duas vertentes: por um lado os processos de resolução de tarefas de formulação de problemas, o conhecimento matemático que manifestavam e como o mobilizavam; por outro lado o que eles pensavam sobre a formulação de problemas, isto é, quais os seus interesses e expectativas.

As questões que orientaram esta investigação foram:

- Que processos de formulação de problemas utilizam ou explicitam os alunos?
- Qual é e como é mobilizado o conhecimento matemático na formulação de problemas?
- Que relações pode haver entre os processos de formulação de problemas que os alunos utilizam e o que eles pensam sobre as tarefas de formulação de problemas, os seus interesses e expectativas em relação a este tipo de tarefas?

O interesse deste estudo foi ver de perto como os alunos formulam os problemas, em que pensam, porque pensam desse modo ou como o fazem. Para alcançar este objetivo recorreu-se a um estudo de quatro alunos por meio de entrevistas em profundidade.

Tratando-se de problemas de matemática escolar, foi implicado um conteúdo curricular – a multiplicação e divisão – e um género de problemas – os que na literatura anglo-saxónica se designam por *word-problems*, isto é, problemas com um contexto próximo da realidade quotidiana (ainda que possam envolver elementos fantasiados) descrito em linguagem comum, e que se resolvem por uma ou mais operações conhecidas. Este é o tipo de problemas que predominam nos manuais escolares. O livro já acima indicado, *A experiência matemática no ensino básico*, designa-os por problemas de cálculo.

Christou et al. (2005) definem quatro processos cognitivos na formulação de problemas, mas esses processos estão associados a quatro tipos de tarefas: as que exigem a formulação de um contexto para uma expressão numérica (processo *Compreender*), aquelas em que se pede que sejam feitas perguntas partindo dos dados fornecidos num contexto (processo *Editar*), etc., Na secção 3.1., se apresentará e discutirá este assunto detalhadamente. Interessa aqui chamar a atenção que neste estudo, investigar o processo de formulação do problema não corresponde a identificar um destes processos, mas a encontrar a maneira como o aluno pensou para inventar o problema pedido na tarefa. Os designados processos de Christou et al. (2005) servirão sobretudo para identificar o tipo de tarefa de formulação de problemas que é dada ao aluno.

A formulação de um problema envolve necessariamente um assunto, não há problema nenhum quando não há assunto. O assunto escolhido para implicar nas tarefas de formulação de problemas foi a multiplicação e divisão. Há diferentes razões para ter sido assim. Antes de mais decidiu-se fazer o estudo com alunos do 3.º ano[2] porque se pretendia que tivessem já alguma mestria na leitura e na escrita. Sendo do 3.º ano, as operações numéricas que estão a ser alvo principal de aprendizagem são exatamente a multiplicação e a divisão.

Tendo em conta o objetivo já referido, o quadro teórico envolve quatro pontos principais: a formulação de problemas, a resolução de problemas, em especial o caso dos *word-problems* e, por fim, a problemática em torno da multiplicação e divisão.

Na formulação de problemas pretende-se dar conta de alguns aspetos principais da investigação já realizada, focando depois a atenção na definição do que é a formulação de problemas, na tipologia de tarefas e nos processos cognitivos envolvidos em tal atividade.

A resolução de problemas impõe-se pela relação intrínseca com a formulação de problemas e por serem, de facto, duas atividades indissociáveis. A revisão da literatura sobre resolução de problemas que se pretende aqui apresentar centra-se nas questões em torno da sua essência e natureza. Os *word-problems* constituíram-se um campo particular de investigação dentro da resolução de problemas. As tarefas desenvolvidas ou analisadas neste estudo são, essencialmente, *word-problems* e, nessa medida, é pertinente rever o que de essencial a literatura científica tem a dizer sobre este tipo de problemas.

A multiplicação e divisão são as operações elementares em que se baseiam as tarefas propostas aos alunos neste estudo. Nesse sentido, são apresentadas teorias que refletem sobre as relações multiplicativas. Foram considerados pertinentes três quadros teóricos sobre a multiplicação e divisão porque são esses os estritamente necessários para analisar o conhecimento matemático que os alunos mobilizaram ou tinham de mobilizar na resolução das tarefas de formulação de problemas.

Nas tarefas de formulação de problemas em que é fornecido ao aluno uma expressão numérica para ele inventar o contexto que ela modela, o que está em causa é o sentido que o contexto dá à operação. Uma multiplicação tanto modela um contexto de produto cartesiano, como o cálculo da área de um retângulo, a comparação multiplicativa entre dois valores, enfim, várias situações. Além disso pode haver dificuldade em inventar (e houve) o contexto porque não se compreende bem o tipo de referente ou qualidade ou grandeza que se atribui aos fatores. Para enquadrar as ações dos alunos neste tipo de tarefa de formulação de problemas foi necessário recorrer essencialmente aos sentidos das operações definidos por Brian Greer e à teoria de Judah Schwartz sobre quantidades intensivas e extensivas.

[2] Uma vez que a recolha de dados se estendeu ao primeiro período do 4.º ano, diz-se que este estudo incidiu sobre alunos dos 3.º e 4.º anos.

Nas tarefas de formulação de problemas em que se dá ao aluno o contexto com os necessários dados e condições e se pede que formulem perguntas, é necessário conseguir descrever os processos mobilizados pelos alunos para relacionar os dados colocados na questão. Essa descrição foi feita com base na teoria dos campos conceptuais definida por Gerard Vergnaud, especificamente o campo das estruturas multiplicativas. Uma vez que se descreveu o campo concetual das estruturas multiplicativas, considerou-se útil ter uma visão mais abrangente da teoria dos campos concetuais.

3. A Formulação e a Resolução de problemas

A ideia de que a capacidade de resolução de problemas e a capacidade de os formular são dois aspetos indissociáveis, tem sido veiculada desde os anos oitenta (e.g. Kilpatrick, 1987; Silver, 1994). De acordo com Silver (2013) vários estudos empíricos têm encontrado estreitas relações entre as habilidades de resolução e formulação de problemas e reivindicado a importância da formulação de problemas no desenvolvimento de habilidades para resolver problemas e que os alunos com maior sucesso na resolução de problemas são também os que detêm maior capacidade para os formular, para colocar questões coerentes e pertinentes sobre dados fornecidos.

3.1. A formulação de problemas

O interesse da investigação pela formulação de problemas tem vindo a crescer e a consolidar-se. Como afirmam Stoyanova e Ellerton (1996),

> In mathematics education, after over a decade of studies which have focused on problem solving, researchers have slowly begun to realize that developing the ability to pose mathematics problems is at least as important, educationally, as developing the ability to solve them. (pág. 518)

Num artigo de 2009, Pelczer e Gamboa apresentavam como principais tendências da investigação i) a relação entre formulação e resolução de problemas; ii) as habilidades de formulação de problemas e processos envolvidos na sua formulação; iii) a classificação de tarefas de formulação de problemas e iv) a formulação de problemas e criatividade.

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de incidência da investigação sobre formulação de problemas, ou em que a formulação de problemas é um meio para avaliar aspetos do desempenho dos alunos na aprendizagem da Matemática. Hashimoto (1987), por exemplo, sustenta que através da formulação de um problema semelhante a outro já conhecido e resolvido é possível observar, de certo modo, o que os alunos compreendem sobre os conceitos matemáticos envolvidos. Outros estudos têm procurado caracterizar as atividades de formulação de problemas, os processos cognitivos envolvidos e as estratégias usadas pelos alunos (e.g. Stoyanova & Ellerton, 1996; Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005; Stoyanova, 2005). Um estudo realizado nos EUA (Cai, Moyer, Wang, Hwang, Nie, & Garber, 2013) usou a formulação de problemas para avaliar, em estudantes da *high school*, o efeito da implementação de reformas curriculares iniciadas na *middle school*. Há vários estudos que usam a formulação de problemas para avaliação da competência dos estudantes na aprendizagem da Matemática, mesmo em níveis escolares elementares (Barlow & Drake, 2008; Lin, 2004). A promoção do gosto pela Matemática e sua influência na aprendizagem e a relação entre aspetos afetivos e cognitivos tem sido outro campo de estudo (Georgiadou-Kabouridis & Bartzakli, 2009; Nicolaou & Philippou, 2007; Zakaria & Ngah, 2011), reconhecendo que a formulação de problemas tem um efeito positivo no desenvolvimento destas atitudes. Também, na medida em que se espera que um professor saiba criar problemas sobre uma larga diversidade de conceitos matemáticos e métodos de resolução, a formação de professores tem sido outra área explorada (Chapman, 2012; Leung, 2013; Lin, 2004; Singer & Voica, 2013). A investigação na formulação de problemas tem naturalmente vindo a cruzar-se com o estudo da criatividade e nas implicações desta na aprendizagem da Matemática (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Sriraman, Yaftian, & Lee, 2011).

Definir a formulação de problemas e enquadrar a grande diversidade de tarefas e conceções sobre a atividade tem sido alvo de um esforço crescente da investigação.

Stoyanova e Ellerton (1996) propõem uma definição de formulação de problemas como sendo "the process by which, on the basis of mathematical experience, students construct personal interpretations of concrete situations and formulate them as meaningful mathematical problems" (pág. 1). A amplitude desta definição permite abarcar uma grande diversidade de situações de formulação de problemas e serve também os propósitos da investigação que se debruça sobre as relações entre a formulação e a resolução de problemas enquanto meios de ensino e aprendizagem da Matemática. É considerando esta definição, que Stoyanova e Ellerton (1996) pretendem agrupar qualquer atividade Matemática de formulação de problemas em três categorias de situações:

Livre – quando a tarefa consiste em formular problemas a partir de uma dada situação mais ou menos natural, podendo conter algumas orientações acerca do que se pretende. Como exemplo de situações livres utilizadas em estudos, Stoyanova e Ellerton referem atividades nas quais se pede aos alunos que formulem um problema para outro colega ou para a professora resolver, ou um problema que gostem de resolver ou que achem difícil.

Semi-estruturada – quando a tarefa consiste em formular um problema a partir da exploração de uma situação aberta, completando-a com base no conhecimento, capacidades, conceitos, relações que fazem parte da sua experiência matemática. Apresentam como exemplo a formulação de um problema que dê sentido a cálculos que são apresentados, ou que incida sobre um conceito específico.

Estruturada – quando a tarefa consiste em formular problemas a partir de um problema bem determinado. Por exemplo, formular as questões possíveis de um problema cuja questão foi omitida, ou formular um semelhante a outro que já se conhece, ou identificar dados omissos ou desnecessários, ou mudar condições que alterem (ou não) o modo de resolução.

Silver (1995) toma como referência a resolução de problemas e diferencia três tipos de tarefas de formulação: as que formulam o problema antes da resolução, as que o fazem durante a resolução e as que fazem após a resolução. No primeiro caso o problema não está ainda bem definido, apenas se está diante de uma situação que é fornecida como estímulo, podendo ser um texto, uma imagem, tabela de dados, gráfico,… O segundo caso corresponde à intenção de testar ou modificar as condições do problema no sentido de o compreender ou encontrar uma estratégia. No terceiro caso, a tarefa de formulação procura extensões ou relações do problema já resolvido com outros problemas, outros contextos e aplicações.

A classificação de Stoyanova e Ellerton (1996) toma em conta o nível de restrição que a tarefa impõe, enquanto a classificação de Silver (1995) assenta nas etapas de resolução de um problema.

Christou et al. (2005) apresentam uma outra classificação, a qual, dizem, reúne as duas anteriores:

i. formular um problema (situações livres);
ii. formular um problema para uma resposta que é apresentada;
iii. formular um problema a partir de algumas informações;
iv. formular questões para uma situação problemática;
v. formular um problema para uma expressão de cálculo que é apresentada.

Com base nestas categorias, Christou et al. (2005) desenvolvem um modelo de análise de respostas de alunos a tarefas de formulação de problemas para identificar quatro processos cognitivos presentes na formulação de problemas. Utilizam na investigação quatro tipos de tarefas, correspondendo às quatro últimas categorias que estabeleceram e a cada tipo fazem corresponder um processo cognitivo.

Compreender (*comprehending*) - Formular problemas para equações ou cálculos. Exige o conhecimento do significado e propriedades das operações.

Traduzir (*translating*) - Formular problemas a partir de gráficos, diagramas ou tabelas. Requer a compreensão de diferentes representações de relações matemáticas.

Editar (*editing*) - Formular problemas sem restrições a partir de dados fornecidos por meio de uma história.

Selecionar (s*electing*) - Formular problemas para uma dada resposta, a qual estabelece uma restrição, exigindo o relacionamento entre os dados fornecidos.

Estes autores estabelecem uma hierarquia de exigência entre estes processos a qual, apresentada por ordem crescente de dificuldade, é *Compreender, Traduzir*, *Editar* e *Selecionar*. O processo *Selecionar* é mais difícil que o *Editar* porque exige que os alunos compreendam a estrutura do contexto e as relações entre os dados fornecidos. O processo *Traduzir* é mais exigente que o *Compreender* porque é necessário conhecer as representações das relações matemáticas fornecidas.

Ainda dentro deste estudo (Christou et al.,2005) os autores, consideram haver três categorias de alunos de acordo com o seu desempenho. Na primeira categoria incluem os alunos que apenas têm melhor desempenho nas tarefas associadas ao *Compreender*; estes alunos tendem a reproduzir os problemas de cálculo que são comuns ao treino das operações e que aparecem tradicionalmente nos manuais escolares. Na segunda categoria incluem os alunos que apenas têm mais sucesso nas tarefas associadas ao *Compreender* e *Traduzir*; estes alunos não só formulam problemas a partir de dados numéricos claramente fornecidos, como conseguem também lidar com dados representados em tabelas e gráficos compreendendo as suas relações e formulando problemas com sentido. Na terceira categoria estão os alunos que têm sucesso em todo o tipo de tarefas associadas aos processos *Compreender*, *Traduzir*, *Editar* e *Selecionar*.

No sentido de estabelecer um enquadramento que permita analisar de forma integrada os processos envolvidos na formulação e na resolução de problemas, Kontorovich e Koichu (2009) apresentam um ensaio teórico que pretende mostrar a presença dos processos de resolução na formulação de problemas. Partem do modelo de resolução de problemas de Schoenfeld (1992) e de uma adaptação posterior de Carlson e Bloom (2005) para enquadrar os processos usados por *experts*. Para Schoenfeld (1992) a resolução de problemas é caracterizada como uma atividade que envolve conhecimento (de base), estratégias de resolução de problemas, monitorização e controlo, crenças e afetos, e práticas. Para Carlson e Bloom (2005) a resolução de problemas comporta quatro categorias: recursos, heurísticas, afetos e monitorização. No modelo proposto por Kontorovich e Koichu (2009) para caracterizar tanto os processos como os produtos do formulador de problemas são estabelecidas quatro categorias principais:

Recursos – conhecimento matemático, competência na resolução de problemas, e o estímulo que é dado para a formulação do problema;

Heurísticas – compreendem os processos de abordagem ao estímulo no sentido de lhe dar significado, selecionar, traduzir e codificar informação e as estratégias de formulação de problemas;

Aptidão – incluem as crenças e a capacidade de monitorização dos próprios processos e avaliação da solução encontrada;

Contexto social – é, naturalmente, a situação em que decorre a atividade de formulação de problemas. Este aspeto tem a ver com as práticas referidas por Schoenfeld (1992) e é um dos fatores importantes na influência do comportamento dos alunos na resolução de problemas (e.g. Gravemeijer, 1997; Schoenfeld, 1992).

Singer e Voica (2013) desenvolveram um estudo empírico para estabelecer um modelo de fases de resolução de problemas centrado nos processos dos alunos, que permitisse aos professores a análise das resoluções dos alunos, identificando pontos críticos sobre os quais podem / devem incidir as tarefas de resolução ou de formulação de problemas que constroem para os seus alunos. O modelo comporta quatro categorias operacionais:

Descodificar (decoding) – descodificar o enunciado do problema que é composto de: i) um contexto matemático ou da realidade; ii) dados (numéricos) associados ao contexto; iii) operadores ou esquemas operacionais, iv) restrições sobre os dados que relacionam o contexto com os dados e operadores, e v) restrições que implicam (pelo menos) um valor desconhecido no contexto, o qual implica as relações entre dados, operadores e a questão do problema.

Representar (representing) – a interpretação do enunciado leva à construção de um modelo mental – imagens, desenhos, esquemas, configurações, que o próprio aluno desenha ou simplesmente imagina ou descreve usando palavras e/ou gestos.

Processar (processing) – partindo do modelo mental construído o/a aluno/a identifica um modelo matemático (ou estrutura matemática) que envolve conceitos e procedimentos matemáticos – competência matemática em ação.

Aplicar (implementig) – aplicar o modelo matemático identificado na resolução do problema, o que envolve o domínio prático dos conhecimentos matemáticos aprendidos – estabelecer os passos adequados à resolução do problema, o uso de algoritmos ou a capacidade de estabelecer uma estratégia de cálculo.

Estas autoras desenvolvem ao longo do artigo uma análise de problemas propostos por professores e alunos mostrando como o modelo pode efetivamente funcionar como uma ferramenta ao serviço dos professores.

Tanto Singer e Voica (2013) como Kontorovich e Koichu (2009) tomam em conta a taxonomia que Christou et al. (2005) propõem. No entanto, Singer e Voica sublinham a diferença de objetivos (e de metodologia): a taxonomia foi construída no sentido de identificar os processos e classificá-los, possibilitando uma hierarquização do nível de desempenho dos alunos. O modelo de Singer e Voica (2013) identifica os processos em cada fase da resolução dos problemas. Referem também que um solucionador de um problema pode não evidenciar um determinado processo, porque dependendo do problema e da capacidade do solucionador, alguns dos processos podem ser rapidamente ultrapassados.

3.2. A resolução de problemas

Neste tópico aborda-se a resolução de problemas no sentido de caracterizar alguns aspetos essenciais, como as considerações sobre o que é um problema, como podem ser diferenciados de acordo com características próprias e referir algumas questões levantadas em torno da sua integração no ensino.

De acordo com Schoenfeld (1992) a resolução de problemas ganhou um papel de grande importância nos currículos a partir dos anos oitenta com a publicação da *An Agenda for Action*, pelo

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980). Em termos simples, a preocupação que estava por detrás deste movimento prendia-se com a necessidade de que a aprendizagem da Matemática se fizesse com sentido e que os alunos pudessem dar significado aos conceitos e procedimentos matemáticos. Até então os problemas eram tradicionalmente usados como meio de expor e praticar factos e procedimentos matemáticos, sem grande preocupação com uma compreensão abrangente dos seus significados (Schoenfeld, 1992). A ideia da resolução de problemas trazi também consigo a preocupação pela aprendizagem de habilidades de resolução de problemas e pela construção do conhecimento matemático que fizesse sentido para o aprendente. Para o desenvolvimento da investigação sobre a resolução de problemas foi decisivo a redescoberta das heurísticas propostas por George Polya na sua obra How To Solve It (Polya, 1945/1957) e outras publicações posteriores.

Schoenfeld (1992) fez uma análise crítica do que se passou na década de 1980 quanto aos esforços de colocar a resolução de problemas no centro do ensino da Matemática. Dá conta da dificuldade em definir o que é resolução de problemas, questionando o seu papel no ensino da Matemática. Para Schoenfeld a resolução de problemas deve sobretudo servir o 'aprender a pensar matematicamente', expressão abrangente que contempla *i)* o desenvolvimento de um ponto de vista matemático – de quem possui a capacidade e a predileção pelos processos de matematização e abstração, e *ii)* o desenvolvimento da capacidade de utilização das ferramentas matemáticas ao serviço da compreensão das estruturas matemáticas. De facto os problemas sempre fizeram parte do ensino da Matemática. O movimento em torno da resolução de problemas nasceu, em parte, por causa da insatisfação relativa aos resultados dos alunos evidenciados em estudos e testes padronizados, e trouxe consigo a reflexão sobre a função que os problemas devem desempenhar no ensino. A problemática sobre o papel dos problemas no ensino está intimamente ligada à definição de problema. Em 1980, Lester apresenta uma definição para problema e resolução de problemas que considera coerente com a definição de outros investigadores a que faz referência. Considera que um problema "is a situation in which an individual or group is called upon to perform a task for which there is no readily accessible algorithm which determines completely the method of solution" (Lester, 1980; p. 287). Consequentemente a resolução de problemas é o conjunto de ações necessárias para chegar à solução. Completa ainda com a condição necessária de que o/os solucionadores queiram resolver tal problema, sem a qual a tarefa não se constituiria como problema. Apesar deste sentido dado a problema e a resolução de problemas poder reunir um consenso alargado, a verdade é que o modo como aparece em diferentes currículos e como aparece em manuais escolares tem sido muito diverso (Lester, 1980; Schoenfeld, 1992).

Num artigo de 1994, Lester faz uma revisão das principais preocupações que orientaram a investigação sobre a resolução de problemas entre 1970 e 1994: i) a identificação das características que tornam um problema mais difícil que outro, ii) o que distingue os alunos com maior e menor sucesso, iii) o ensino de estratégias e heurísticas para a resolução de problemas e a sua utilização pelos alunos, iv) a influência das atitudes e crenças bem como a capacidade dos alunos de monitorização dos seus processos de resolução e ainda v) a influência do meio no desenvolvimento da aprendizagem.

Numa proposta para caracterizar o que é um problema, Borasi (1986) procura semelhanças e diferenças que possam distinguir diferentes problemas e propõe uma classificação bastante alargada capaz de abarcar os mais diferentes tipos, quer pertençam ou não ao domínio da Matemática. A sua classificação baseia-se na estrutura dos problemas em si e, como a autora reconhece, não toma em consideração aspetos subjetivos do âmbito do solucionador. Toma como ferramenta de análise quatro categorias: a explicitação do contexto, as qualidades da formulação, o número e natureza das soluções e os possíveis métodos de abordagem para a resolução do problema. Define assim sete tipos de problemas:

Exercício: não apresenta qualquer contexto[3], tem uma formulação única (não é ambígua), uma solução única e exata e a resolução faz-se pela aplicação de um ou vários algoritmos já conhecidos.

Problema-de-palavras[4]: contexto bem explícito no enunciado, formulação única, tem maioritariamente uma solução única e exata e a resolução faz-se por meio de uma combinação de algoritmos já conhecidos.

Problema-enigma[5]: contexto completamente explícito, uma única formulação, normalmente a solução é exata e única e a resolução pode envolver a elaboração de um algoritmo, a reformulação do problema ou uma súbita intuição.

Prova de uma conjetura: contexto parcialmente explícito (assume-se que o aluno saiba a teoria necessária), a formulação única e explícita, a solução pode ser só uma, mas não necessariamente, e a resolução envolve a exploração do contexto ou reformulação do problema, ou ainda a elaboração de um novo algoritmo.

Problema da vida real: o contexto não é totalmente explícito (há outros aspetos da realidade a ter em conta), há várias formulações possíveis, há várias soluções (e são muitas vezes

[3] A não ser que se considere como contexto as propriedades, relações e conceitos matemáticos presentes no exercício, p. ex., do género 34 + 28 : 2 = ?.

[4] "Word-problem" no original. A tradução literal para "problema de palavras", no contexto da língua portuguesa, conduz a um conceito redutor. Um exemplo dessa redução é a popular adivinha "Qual é a pata direita do cavalo de D. José?" – referindo-se à estátua equestre de D. José que está na Praça do Comércio em Lisboa.

5 "Puzzle-problem" no original. Borasi dá um exemplo que em português não seria tomado como sendo um puzzle: "Como formar 4 triângulos congruentes com 6 fósforos, considerando um fósforo como o lado de cada triângulo."

aproximações), e a resolução envolve a reformulação, a exploração do contexto e criação de modelos.

Situação problemática: o contexto está parcialmente explícito no enunciado e sugere uma problemática, é normalmente necessário definir melhor a formulação, há várias soluções e o processo de resolução envolve a exploração do contexto a reformulação ou a formulação de outros problemas.

Situação: o contexto está apenas parcialmente explícito e não sugere propriamente uma problemática, não há, portanto, qualquer formulação, a solução depende da formulação do problema e a estratégia implica e tem a ver com o problema formulado.

Esta caraterização tem servido como referência e algumas adaptações foram feitas posteriormente por outros investigadores. Por exemplo, Boavida (1993) introduz duas novas categorias: problemas para equacionar e problemas para demonstrar.

3.3. Word-problems

Muitos investigadores têm considerado os exercícios e os *word-problems* como tarefas rotineiras, de treino e aplicação de conhecimento previamente exemplificado e adquirido que aparecem nos manuais escolares, no fim de um capítulo sobre um tópico matemático específico. De acordo com as definições de problemas anteriormente referidas, este tipo de tarefas não seriam consideradas problemas (Lester 1980). Como vemos na classificação de Borasi (1986), os exercícios distinguem-se dos *word-problems* por estes últimos apresentarem um contexto. Este contexto refere-se à explicitação por palavras de uma situação da vida quotidiana, normalmente próxima da realidade dos alunos e que, do ponto de vista do ensino, pode ser útil para dar sentido ao conhecimento matemático, estabelecendo uma ligação entre este e a realidade (e.g. Corte, Verschaffel, & Greer, 2000; Wyndhamn & Säljö, 1997). Entretanto reconhece-se que a esmagadora maioria deste tipo de problemas, apresentados em manuais, não são mais do que exercícios disfarçados em enunciados verbais (Gravemeijer, 1997) e que a sua resolução sistemática conduz a resoluções incorretas quando, para a resposta, é necessário considerar algumas condições inerentes ao contexto real. A esta alienação do conhecimento da realidade na resolução de problemas tem sido designada por *suspention of sense-making* (Bonotto, 2002). Gravemeijer (1997) aponta dois fatores que contribuem para que os alunos não tenham em conta o conhecimento das condições reais das situações: o caráter estereotipado das tarefas e o ambiente de resolução de problemas na sala de aula. Muita investigação tem sido feita no sentido de esclarecer e remediar estes fatores. Assim se tem, por exemplo, recomendado que os *word-problems* sejam diversificados e enriquecidos de modo a incluírem dados a mais ou a menos, exigirem estimativas para além de cálculos exatos, que envolvam situações com mais de um passo para a sua resolução e se envolvam os alunos na formulação dos problemas (Greer, 1997). Relativamente ao ambiente em que a atividade matemática decorre na sala de aula tem sido referida a necessidade de consciencialização e mudança no sistema de valores, de regas e de expectativas que implicam mutuamente professores e alunos (Gravemeijer, 1997; Greer, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997). É necessária a discussão e justificação das respostas a um problema, num ambiente em que os alunos são chamados a validar o resultado atribuindo-lhe significado de acordo com o contexto realista do problema.

4. A teoria dos campos conceptuais

A teoria dos campos conceptuais foi desenvolvida por Gerard Vergnaud com o objetivo de fornecer um quadro teórico para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas. Por competências complexas Vergnaud refere-se sobretudo às que estão ligadas ao conhecimento científico e técnico no domínio da educação e formação profissional (Vergnaud, 1990, 1996). Começou por ser construída para o estudo dos processos de concetualização nas aprendizagens no campo das estruturas aditivas e multiplicativas, mas não se limita à Educação Matemática e estendeu-se a outras áreas.

É uma teoria que integra ideias desenvolvidas por outros investigadores que procuraram compreender o problema do desenvolvimento cognitivo, entre os quais Piaget e Vygotsky (Vergnaud, 1996). Vergnaud importa de Piaget o conceito de esquema, de que o conhecimento é adaptação e a ideia de que a ação e a representação têm um papel fundamental no desenvolvimento. Quanto ao trabalho de Vygotsky, Vergnaud faz muitas vezes referências às questões relativas ao papel da linguagem e representação simbólica no pensamento (Vergnaud, 2009). No entanto distancia-se destes investigadores em aspetos que considera essenciais.

> Piaget e Vygotsky estão interessados no desenvolvimento e na longa duração do desenvolvimento; suas convergências são grandes. É verdade que Piaget enfatiza mais a atividade do sujeito do que a cultura, mas está perfeitamente consciente do papel da cultura no desenvolvimento cognitivo da criança. Vygotsky dá prioridade ao peso dos processos de cultura e mediação, assegurados pelo adulto, tendo em vista a apropriação da cultura pela criança, mas ele também é um dos pais da teoria da atividade: dá à linguagem e ao simbolismo um papel essencial na mediação. (Vergnaud, 2007, p. 286)

A teoria dos campos conceptuais de Vergnaud aborda a questão da cognição centrando-se no processo de concetualização em situação e reformula necessariamente a ideia do que é um conceito. De acordo com o autor, a chave mestra da cognição é a concetualização e esta não se faz senão em situação. (Vergnaud, 1998, p. 173). Para além desta importância dada à situação em que mergulha o conceito a ser aprendido ou desenvolvido, invoca a necessidade de se ter em conta o conteúdo do próprio conceito.

> Devo acrescentar que minha experiência como pesquisador em didática me permitiu ver as coisas de maneira diferente de Piaget, que não estava interessado no conhecimento escolar, e Vygotsky, que embora interessado, não entrou suficientemente na análise do conteúdo do conceito. (Vergnaud, 2007, p. 286)

A importância dada ao conteúdo do conceito não significa, no entanto, que a aprendizagem de um conceito se concentre no conhecimento da sua definição. São as situações com as quais se confronta uma pessoa que dão sentido aos conceitos nelas implicados e a aprendizagem de um conceito, das propriedades que o envolvem, não é possível senão num conjunto de situações diversas e num longo período de tempo (eg. Vergnaud, 1990, 1997). De acordo com Vergnaud, tanto Piaget como Vygotsky não definiram conceito do ponto de vista do desenvolvimento e não deram primazia às situações enquanto referência do conhecimento (Vergnaud, 1996). Um conceito ganha sentido num conjunto plural de situações e lidar com uma situação exige mais do que um conceito. Este enunciado sublinha a importância dada às situações e ao conceito e parece sugerir que o sentido (o significado) de alguma coisa está nas situações, o que não é verdade. Esta discussão será feita mais à frente a propósito das representações, dos significados e significantes. É a complexidade deste problema que leva Vergnaud a estabelecer a ideia de campo concetual.

As estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas e a aprendizagem da álgebra foram, entre outros, campos conceptuais aprofundadamente estudados por Vergnaud.

Um campo concetual envolve simultaneamente um conjunto de situações e um conjunto de conceitos intimamente relacionados (Vergnaud, 2009). Assim, de acordo com Vergnaud (1997), investigar a aprendizagem de um conceito exige que se considere que o conceito é constituído por uma tríade de três conjuntos:

- o conjunto das situações que dão significado ao conceito, e onde ele é útil,
- o conjunto dos invariantes operatórios que o sujeito usa para lidar com as situações, e
- o conjunto de representações simbólicas, linguísticas, gráficas ou gestuais que podem ser usadas para representar esses invariantes, situações e procedimentos (pág. 6).

Esta constituição do conceito é comummente apresentada sob a forma de uma expressão C = (S, I, R) onde C é o Conceito, S o conjunto das Situações, I o conjunto dos Invariantes e R o conjunto das Representações. Do ponto de vista psicológico, S refere-se à realidade enquanto I e R se situam no âmbito da representação, onde I se refere ao significado e R ao significante. (eg. Vergnaud, 1988, 1997).

<u>Os Invariantes operatórios e os Esquemas</u>

Os invariantes operatórios estruturam as formas de organização da atividade, isto é, os modos como o sujeito lida com as situações. É aqui que entra o conceito de esquema que Vergnaud vai buscar a Piaget, e do qual fazem parte os invariantes operatórios. O conceito de esquema é central na teoria, ou melhor, os esquemas desenvolvidos pelos sujeitos são a peça central no desenvolvimento cognitivo. A atividade do sujeito ao enfrentar uma situação é uma atividade organizada que tem um caráter de repetição e de variação; seja do gesto ou do pensamento, ela é tão sistemática, quanto oportunista (Vergnaud, 2009). Imagine-se a contagem de bancos dispersos num jardim ou de rebuçados dispostos ao alcance da mão. As duas situações têm muitas características comuns. Entre muitas competências necessárias para se proceder a uma contagem, tanto numa situação como na outra, algo que é comum é a necessidade de fazer corresponder a cada objeto contado um numeral (correspondência um-a-um). Para garantir essa correspondência o sujeito desenvolve um gesto organizado, seja esse gesto feito com o olhar ou com a mão. A organização do gesto é invariante, mas o modo como o realiza é diferente entre uma situação e outra, ou entre um adulto e uma criança para uma mesma situação. O que é invariante (entre outros) é a necessidade de fazer a correspondência termo a termo, mas o modo como isso se faz depende das situações e da experiência que se adquire ao longo do tempo (contagem dois a dois ou com base noutros agrupamentos).

Disse-se acima que os invariantes operatórios fazem parte dos esquemas e que têm um papel na sua estruturação. Um esquema é uma organização invariante da atividade para lidar com uma dada classe de situações. Deve ser considerado como um todo, ainda que constituído por vários elementos, dinâmico, pois ocorre num determinado período de tempo, e funcional dado que procura alcançar um objetivo (Vergnaud, 1997). O que é invariante é a organização e não a conduta observável, como se exemplificou brevemente acima, ou seja, os esquemas não são estereótipos dado que são capazes de produzir condutas diferentes em função das variáveis presentes na situação. Além disso os esquemas não organizam somente as ações observáveis mas também o pensamento subjacente (Vergnaud, 2009). Esta organização invariante da atividade é composta por:

• Objetivos, subobjetivos, expectativas, antecipações;

• Regras de ação para seleção de informação e controlo;

• Invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação;

• Possibilidades de inferência em situação.

Pelo caráter funcional que possui o esquema, dele fazem parte os objetivos e subobjetivos, expectativas ou antecipações relativamente à completa realização da tarefa. Para que a atividade seja concluída com sucesso é necessário que a ação seja regulada e esse controlo precisa de ser informado, isto é, para controlar a sua ação o sujeito precisa de saber se está a fazer o que pretendia e se o está a fazer bem. Para a identificação, recolha e tratamento da informação pertinente para tal regulação são necessárias categorias de pensamento. Essas categorias são os invariantes operatórios, os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação, sem os quais não haveria conhecimento (conhecimento-em-ação) para gerir os objetivos e subobjetivos, para antecipar e regular a ação. Por fim, é necessário que haja possibilidade de inferência, sem a qual os esquemas não passariam de automatizações, de estereótipos, e não haveria um cálculo permanente do resultado da ação, da sua antecipação e a necessária adaptação tendo em conta as variáveis da situação (Vergnaud, 1990).

Os esquemas não funcionam da mesma maneira em diferentes tipos de situações. Há situações que o sujeito domina, dado que tem ao seu alcance as competências necessárias para a resolução imediata da tarefa, e aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências e que, portanto, oferecem dúvidas, exigem ponderação e ações exploratórias que podem conduzir ao êxito ou fracasso. No primeiro caso, para uma mesma classe de operações pode haver ações bastante automatizadas veiculadas por um único esquema, enquanto nas outras podem estar envolvidos vários esquemas que podem competir entre si e que, para cumprir a tarefa, têm de ser acomodados, separados e reajustados (Vergnaud, 1990). Abrir uma porta é algo que se faz rotineiramente, variando apenas com o tipo de maçaneta da porta, mas quando se levam ocupadas as duas mãos é preciso recalcular a ação e entram em confronto diversos esquemas.

Para controlo da sua atividade, o sujeito precisa de identificar e retirar da situação e da sua própria ação em situação, informações essenciais sobre os objetos, propriedades e relações, e de tratar essa informação. Entram aqui dois conceitos introduzidos por Vergnaud: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, os quais são reunidos na expressão "conhecimentos-em-ação" e constituem os invariantes operatórios. Diz-se "em ação" porque não são explícitos nem passíveis de serem explicitáveis pelo sujeito em situação (eg. Vergnaud, 1990, 2009). Podem ser identificados e usados pelo sujeito numa determinada situação e não em outra onde são também pertinentes. Além disso também acontece que podem ser tidos como verdadeiros, pelo sujeito, teoremas que o não são.

Os invariantes operatórios, à semelhança de um icebergue, constituem a parte submersa, pois o que está à superfície e que pode vir a ser explicitável pelo sujeito é uma pequena parte de quanto é imprescindível no processo de concetualização. Por outro lado, de acordo com Vergnaud (1991), não é possível descrever os invariantes operatórios sem usar categorias explícitas do conhecimento: Argumentos-objetos, funções proposicionais e proposições.

Um <u>teorema-em-ação</u> é uma proposição, uma afirmação tida por verdadeira pelo sujeito em ação. Pode ter uma validade local, uma das características que o distingue de um teorema propriamente dito. Além disso pode ser falso e ser tomado como verdadeiro pelo sujeito (Vergnaud, 1996).

Um exemplo de teorema-em-ação pode ser tomado da contagem de objetos. Há uma idade em que as crianças, para saberem o total do número de objetos de dois conjuntos disjuntos A e B, não precisam de proceder a nenhum procedimento de contagem depois de saber o número de elementos de A e de B pois conseguem simplesmente adicionar os dois cardinais. Trata-se do teorema que diz que qualquer que seja o cardinal de A e o cardinal de B, o cardinal da reunião dos dois conjuntos, desde que sejam disjuntos, é igual à soma dos cardinais desses mesmos conjuntos. No entanto, os professores e educadores dos primeiros anos de escolaridade sabem que até chegar a esta competência, as crianças usam outros processos que incluem teoremas-em-ação distintos do teorema acima referido. Por exemplo, depois de contarem o número de elementos de A e de B, separadamente, para saber o cardinal dos dois conjuntos voltam a contar todos os elementos, isto é, não procedem à adição dos cardinais. Quer dizer que os vários processos de contagem de objetos dispostos em dois conjuntos disjuntos integram diferentes teoremas-em-ação, isto é, diferentes asserções quanto ao modo que se considera verdadeiro para alcançar o objetivo.

Os conceitos-em-ação não são afirmações e, portanto, não são passíveis de ser verdadeiros ou falsos, mas apenas considerados relevantes ou irrelevantes pelo sujeito em situação. São objetos, propriedades, relações, transformações, processos, etc. (Vergnaud, 1996). Objetos tanto podem ser aqueles materialmente percetíveis (uma casa, uma pessoa,…) como os que são construídos pelo sujeito ou pela cultura social, científica ou técnica (número, área, capital, democracia,…). Na linguagem da lógica assumem o lugar de termos ou designações. As propriedades, relações, transformações,… quer sejam observáveis ou inferidas pelo sujeito a partir dos observáveis constituem aquilo que se pode dizer dos objetos. Nessa medida são expressões proposicionais ou funções proposicionais.

"O planeta Terra tem uma forma esférica" é uma afirmação, uma proposição cuja veracidade se pode discutir tendo em conta um maior ou menor rigor. É um teorema-em-ação. A expressão "O planeta Terra" é um objeto, uma designação, um conceito-em-ação sobre a qual se diz que tem uma forma esférica. A expressão "tem a forma esférica" assim isolada não constitui uma proposição porque não se sabe a que se está a referir. É um atributo ou propriedade de todos os objetos que podem ser reunidos nessa categoria. Poderia referir-se tanto a um determinado corpo celeste, como a uma bola de basquetebol, ou a um determinado grão de areia, etc. Não é um objeto, mas é também um conceito-em-ação, uma expressão proposicional. Uma relação que se pode exprimir dizendo que algo está entre um lugar e outro é também um conceito-em-ação enquanto não se transformar numa proposição (teorema-em-ação) quando tais lugares ou objetos forem claramente identificados. Por exemplo, "3 está entre 2 e 4" é uma proposição verdadeira, um teorema-em-ação. Os números 2, 3 e 4 (objetos, designações) assim como a expressão (função proposicional) "_ está entre _ e _" são conceitos-em-ação.

Significa então que os conceitos-em-ação integram necessariamente os teoremas-em-ação. Não há teoremas sem conceitos assim como não há conceitos sem teoremas. Teoremas podem ocupar o lugar de objetos na construção de outros teoremas.

A Figura 1, na pág. 24, (Vergnaud, 2009) mostra duas situações em que é preciso realizar uma tarefa envolvendo simetria. Na situação da esquerda, pede-se que se complete o desenho do castelo tendo-o por simétrico em relação ao eixo vertical desenhado a tracejado. Na situação à direita é pedido que se desenhe um triângulo A'B'C' por reflexão do triângulo ABC em relação ao eixo d.

As duas situações apresentam dificuldades muito diferentes e colocam em ação esquemas também diferentes, sobretudo no que se refere a objetivos, regras de ação, de controlo, teoremas e conceitos-em-ação e representações. Com este exemplo pretende-se mostrar como os conceitos-em-ação podem desempenhar diferentes papéis nos teoremas-em-ação.

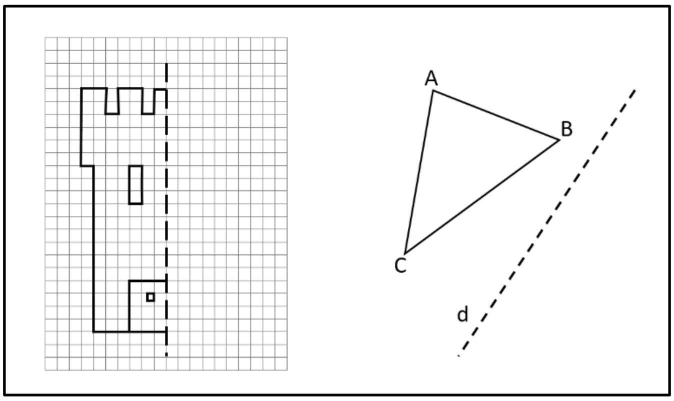


Figura 1: Duas situações de simetria (cf. Vergnaud, 2009, p.90)

Vergnaud apresenta quatro de entre muitos teoremas-em-ação que estão necessariamente presentes nos esquemas que um aluno mobiliza para resolver as situações.

1. O castelo é simétrico.
2. O triângulo A'B'C' é simétrico a ABC em relação à reta d.
3. A simetria preserva as distâncias e as amplitudes dos ângulos.
4. A simetria é uma isometria.

Na primeira frase "castelo" é um objeto e "simétrico" é um predicado referente a um objeto, o castelo. Da 1.ª para a 2.ª afirmação o predicado "simétrico" passa a referir-se a três objetos: os triângulos ABC e A'B'C' e a reta d. Da 2.ª para a 3.ª afirmação o predicado "simétrico" transforma-se num substantivo "a simetria", num objeto sobre o qual se fazem duas afirmações compostas numa só: que preserva as distâncias e que preserva as amplitudes dos ângulos. São dois predicados referentes ao objeto "a simetria". Da 3.ª para a 4.ª afirmação há mais uma transformação, porque o predicado "preserva as distâncias e as amplitudes dos ângulos" torna-se um objeto "a isometria", e a afirmação estabelece a relação entre simetria e isometria.

<u>Representações</u>

Na teoria dos campos conceptuais Vergnaud (2009) considera quatro componentes da representação que, embora não sejam independentes uns dos outros, podem ser distinguidos:

- O fluxo da consciência;
- A linguagem e outros conjuntos de símbolos;
- Conceitos e categorias;

- Conjuntos e subconjuntos de esquemas (pág. 92)

O *fluxo da consciência* não é observável por alguém exterior ao indivíduo que a experimenta. É um quase permanente fluir de perceções, de imagens sensoriais (visuais, auditivas, olfativas,… posturais e de movimento), ideias, gestos e palavras, cuja experiência individual ocorre tanto em estado de vigília como em sonho. O fluxo da perceção faz parte do fluxo da consciência assim como o fluxo da imaginação quer esteja ou não ligado à perceção (Vergnaud, 2009).

A *linguagem e outros conjuntos de símbolos* estão claramente associados à comunicação e à representação, portanto, a uma forma predicativa do conhecimento. O facto de ser um conhecimento enunciável supõe naturalmente a sua representação por meio da linguagem e outros sistemas de significação, sejam gráficos, sonoros, gestuais ou sensoriais. Contudo, estes significantes não exercem apenas uma função de comunicação e representação mas desempenham também uma função importante na concetualização.

> Sem palavras e símbolos, a representação e a experiência não podem ser comunicadas. Além disso, o pensamento é frequentemente acompanhado, ou mesmo dirigido, por processos linguísticos e simbólicos. Vygotsky enfatizou muito bem esse ponto. No campo da matemática, as notações numéricas e algébricas desempenham um papel muito importante nos processos de concetualização e raciocínio, embora não sejam conceitos por si mesmos; a notação musical também não é música, mas as sinfonias não seriam possíveis sem ela (Vergnaud, 2009, p. 92).

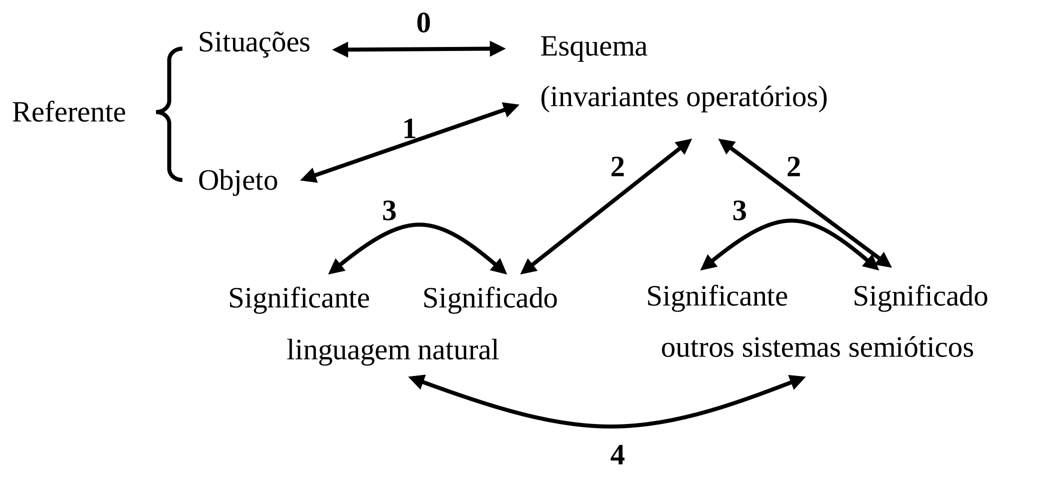
Os *conceitos e categorias*, entendidos de forma mais abrangente englobam os invariantes operatórios, portanto os que são implícitos, mas também os explícitos, formando um sistema que permite a recolha de informações para melhor conduzir a ação. Este componente da representação é importante porque podemos não conseguir traduzir em palavras ou símbolos algo que percecionamos e que faz parte da representação. A forma operacional do conhecimento, ainda que não seja explicitável, é parte integrante da representação.

Os *conjuntos e subconjuntos de esquemas* traduzem o modo como o sujeito lida com as situações. Retomando o que já se disse sobre os esquemas, a ação do sujeito em situação envolve objetivos, regras de ação e controlo, seleção e tratamento de informação, e a possibilidade de inferência é tanto mais necessária quanto mais novas são as situações. A seleção e tratamento da informação é feita por meio do conhecimento-em-ação (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que não é explicitável pelo sujeito. Este é um conhecimento operacional, componente essencial dos esquemas na forma de invariantes operatórios, os quais, ainda que implícitos, "constituem o núcleo da representação concetual ou pré-concetual do indivíduo" (Vergnaud, 1996, p. 224). Portanto, a primeira fonte da representação está na relação dos esquemas com as situações. É a representação que permite antecipar situações e ações futuras e agir em conformidade para alcançar o objetivo a que o sujeito se propõe.

Vergnaud (1998) considera a representação como "um processo dinâmico que vai buscar muito do seu conteúdo ao modo como a ação é organizada" (pág.167), ou seja, não tem o caráter estático que é sugerido pelo triângulo com que muitas vezes se apresenta a relação entre o referente, o significado e o significante. Tendo em conta que um conceito ganha sentido num conjunto plural de situações e que lidar com uma situação exige mais do que um conceito, a relação entre referente, significado e significante não pode ser de um para um (Vergnaud, 1998). Por outro lado, dizer que um conceito ganha sentido num conjunto plural de situações não significa que o sentido esteja nas situações, assim como não está nas palavras ou símbolos. O sentido é evocado na relação do sujeito com as situações e os significantes. Isto significa que são os esquemas mobilizados pelo sujeito para lidar com uma situação ou com um significante que dão significado a um e a outro. O sentido da adição envolve o conjunto dos esquemas mobilizados para lidar com as situações que implicam a ideia de adição, e ainda o conjunto dos esquemas mobilizados para operar as representações inerentes – símbolos numéricos, algébricos, gráficos e linguísticos (Vergnaud, 1990).

As palavras ou outros conjuntos de símbolos desempenham uma função na concetualização que vai além da função de comunicação e de representação. A identificação dos invariantes operatórios corresponde a uma função de representação, mas quando confrontados com situações novas, em processo de aprendizagem, verifica-se por vezes que os indivíduos acompanham as ações com palavras como se estas os ajudassem na planificação e controlo da ação. A representação é, portanto, um recurso funcional na medida em que regula a ação e a perceção, além de ser também um produto da própria ação e perceção (Vergnaud, 1990; 2009).

Vergnaud (1998) propõe assim uma alternativa ao já acima referido triângulo que expressa a relação entre o referente, significante e significado. Nesta alternativa é preciso, resumidamente, ter em conta que os esquemas permitem ao sujeito lidar com as situações. É no âmbito dos esquemas que se coloca a questão da representação. Tanto o conhecimento operacional como o conhecimento declarativo, isto é, o conhecimento que se explicita, são componentes da representação, mas é o conhecimento declarativo que implica a representação tanto em termos de linguagem (palavras, frases – texto) como noutros sistemas semióticos. Este conhecimento declarativo diz respeito aos objetos presentes nas situações. Tem-se assim que do lado da realidade ou do referente, estão as situações e os objetos (com suas propriedades, relações,…), e do lado da representação estão os esquemas na totalidade de que são compostos, mas dentro dos quais estão os invariantes operatórios que permitem a identificação dos objetos. Na Figura 2 (Vergnaud, 1998) observam-se e explicam-se estas relações entre a realidade e a representação.



- Seta **0**: a relação entre situações e esquemas é a primeira fonte de representação e, portanto, conceptualização.
- Seta **1**: a formação de conceitos implica a identificação de objetos, com suas propriedades, relacionamentos e transformações. Esta é a principal função dos invariantes operacionais, que são componentes essenciais dos esquemas.
- Setas **3**: uma linguagem é um sistema de significante / significado; assim também é um sistema semiótico. A relação entre significante e significado não é geralmente uma correspondência de um para um.
- Setas **2**: a relação entre invariantes operacionais e o significado de uma determinada instância linguística ou semiótica também não é uma correspondência um-a-um.
- Seta **4**: a linguagem natural é uma metalinguagem para todos os sistemas semióticos. Novamente, não há correspondência de um para um.

Figura 2: Uma alternativa ao triângulo (Vergnaud, 1998, p.177) das relações entre referente, significante e significado.

A ideia repetidamente afirmada por Vergnaud (eg. 1998, 2009) de que não há, em regra, uma correspondência de um para um entre significante e significado prende-se com a recusa de que um objeto possa ser representado sem ambiguidade e que uma representação possa ser cabalmente descrita por símbolos pois que, de acordo com Vergnaud, o conhecimento não é essencialmente simbólico, ainda que os símbolos desempenhem um papel muito importante no pensamento. Contudo, se a representação não se ajustasse de algum modo à realidade seria impossível que ela desempenhasse a função adequada na ação do sujeito, na interação com os outros e na construção da cultura, do conhecimento científico, etc. De facto, como tem sido afirmado até aqui, a representação forma um sistema computável, isto é, o sujeito pode usá-la para operar, para raciocinar, sem perder a correspondência à realidade. Para explicar esta correspondência entre a realidade e a representação, Vergnaud recorre ao conceito de homomorfismo.

O homomorfismo é uma função que preserva a estrutura das operações de um conjunto de partida num conjunto de chegada.

Um exemplo bastante elementar e que é interessante no âmbito do que está a ser aqui discutido, pode ser dado com a comparação de dois conjuntos de objetos. Suponhamos o conjunto dos berlindes do António (A) e o do Bernardo (B). Sobre esses dois conjuntos pode dizer-se que: "A tem mais berlindes que B", ou "A tem tantos berlindes quanto B", ou "A tem menos berlindes que B". No campo da realidade a comparação em causa é feita recorrendo a uma correspondência de um para um entre os berlindes de um e outro conjunto. Já a representação permite contar os berlindes de cada conjunto e comparar os cardinais. Há, tanto num campo como no outro, uma relação de ordem que é preservada em função do homomorfismo.

Esta possibilidade de homomorfismo entre as duas estruturas, a da realidade e a da representação, explica como uma representação adequada, ou parcialmente adequada, dá ao sujeito a capacidade de calcular efeitos reais usando apenas a representação, e também permite entender como os sistemas simbólicos ajudam a raciocinar.

5. A Multiplicação e a Divisão

A multiplicação e divisão têm merecido grande atenção por parte da investigação em virtude da complexidade dos conceitos e da sua aprendizagem. Compreender como os alunos constroem o conhecimento sobre este domínio é um objetivo da investigação. O que está em causa é a própria concetualização da multiplicação e o modo como tal conhecimento se manifesta e se constrói no indivíduo. O problema é que muitos investigadores consideram que a operação multiplicação, do ponto de vista concetual, não pode ser definida apenas como uma adição iterada de parcelas iguais[6] (eg. Clark e Kamii**,** 1996; Nunes & Bryant, 1996; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010; Bakker, Van den Heuvel-Panhuizen, & Robitzsch, 2013). Ou seja, do ponto de vista da concetualização essa definição não serve quando se entra em situações onde é contraintuitiva, por exemplo, na multiplicação de números racionais não inteiros (p. ex.: ½×¼).

A adição iterada de parcelas iguais é um procedimento que pode ser usado para resolver uma multiplicação. Há outros procedimentos e a utilização destes por parte de um indivíduo pode depender do tipo de situação multiplicativa com que se confronta. Brian Greer (1992) procura detalhar as diferentes situações em que a multiplicação ou a divisão parecem assumir diferentes sentidos, ou seja, podem ser conceptualizadas de formas mais ou menos diferentes.

Schwartz (1988) desenvolve uma teoria sobre a aprendizagem da matemática onde considera que os números não devem ser desligados dos seus referentes, isto é, de grandezas, quer resultem da contagem (grandezas discretas) ou da medida (grandezas contínuas), distinguindo ainda quantidades extensivas de quantidades intensivas. Dentro deste quadro, distingue a adição da multiplicação porque a primeira não transforma o referente e, pelo contrário, tal acontece na segunda. Isto se discutirá na secção 5.2. (na pág. 40)

Vergnaud (eg. 1983, 1988) enquadra a multiplicação (e a divisão) num campo concetual, o das estruturas multiplicativas, dentro do qual têm de ser tidos em conta muitos conceitos e muitas situações diferentes como se verá na secção 5.1. Vergnaud considera que há grandes diferenças entre as estruturas aditivas e as multiplicativas, pois os invariantes operatórios essenciais para lidar com cada uma são substancialmente diferentes. Reconhece que há pontes pois as crianças podem desenvolver esquemas para lidar com situações multiplicativas a partir de esquemas usados para lidar com situações aditivas. E o que é muitas vezes frisado por Vergnaud é a necessidade de um longo período de tempo (e ensino) tanto para desenvolver os esquemas necessários para lidar com as

[6] Essa definição é dada por matemáticos que a definem no conjunto dos números inteiros não negativos: Sebastião e Silva no *Compêndio de Matemática* na edição de 1975 publicado pelo GEP; ou Bento de Jesus Caraça nos *Conceitos fundamentais de Matemática* tanto na edição de 1941 como na de 1998, esta publicada pela Gradiva.

estruturas aditivas como com as multiplicativas. A transição não é linear, tem avanços e recuos (Ell, 2005).

Clark e Kamii (1996) invocam o trabalho de Piaget para mostrar a diferença concetual entre a adição e a multiplicação, essencialmente a diferença entre as relações de inclusão e de correspondência. Exibem dois diagramas para mostrarem a diferença entre uma concetualização da adição 3+3+3+3 e a concetualização da multiplicação 4×3.

Num procedimento de contagem de objetos a criança estabelece uma correspondência de um para um entre o objeto apontado e o numeral pronunciado. Ela tem de dominar não só a ordem dos numerais e a correspondência mas principalmente a relação de inclusão que lhe permite saber que quando aponta para o segundo objeto e diz “dois” isso significa que inclui o primeiro e o segundo objeto, e quando diz “três” sabe que incluiu o primeiro, o segundo e o terceiro objeto, etc… ou seja, o último numeral dito corresponde ao cardinal do conjunto dos objetos contados. Esta noção de inclusão acontece a um mesmo nível onde todas as unidades representam exatamente 1. A Figura 3, adaptada de Clark e Kamii (1996), mostra uma situação aditiva onde as relações de inclusão acima referidas se situam a um mesmo nível de abstração.

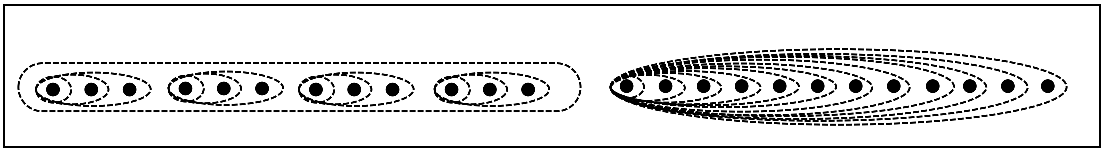


Figura 3: Relações de inclusão numa situação aditiva de 3+3+3+3.

Há um grupo de “3 uns”, mais um grupo de “3 uns”,… quatro grupos de “3 uns” que a criança vai incluir uns nos outros para obter o total (12). Todos os pontos representados na Figura 3 representam apenas um objeto – eles mesmos ou uma abstração de um objeto da realidade. A inclusão pode ser feita de várias maneiras, a mais elementar que se observa nas crianças é, depois de contar todos os grupos de três, voltar a contar a coleção desde o início. Outro modo, mas agora mais sofisticado, é fazer uma contagem saltando de três em três: três, seis, nove, doze. Este processo não pode ainda ser considerado multiplicativo. Mas quando a criança responde que são 12 pontos (ou objetos) porque são 4×3, levanta-se a questão: ela simplesmente enunciou um facto numérico ainda associado a uma representação aditiva (inclusão num mesmo nível de abstração) ou ela tem realmente uma concetualização multiplicativa da situação?

Numa relação multiplicativa a inclusão não se estabelece apenas a um mesmo nível de abstração, e a relação de correspondência é muitos para um, algo que não é necessário nas relações aditivas. Como se pode ver na Figura 4, cada grupo que inclui três “unidades de 1” (nível inferior da figura) compõe uma “unidade de 3” (nível intermédio da figura). A este nível de inclusão, mais abstrato, vê-se que há inclusões sucessivas de 4 “unidades de 3”.

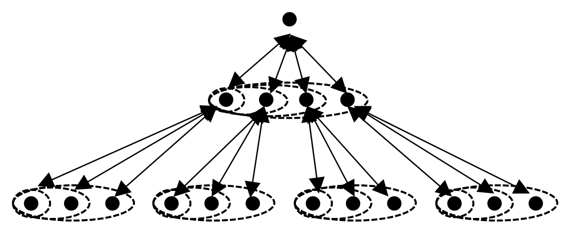


Figura 4: Relações de correspondência de muitos para um em diferentes níveis de inclusão, representando a multiplicação 4×3.

Há três níveis de abstração e o produto (12) manifesta-se em todos eles mas de formas diferentes. No nível básico a inclusão é de "unidades de 1". Esta inclusão é feita a um mesmo nível e é representada pelas elipses, tal como na Figura 3. No nível imediatamente superior a inclusão é de unidades de "3 uns" – são quatro unidades de "3 uns". Isto significa que não só há uma inclusão que é representada pelas elipses, como há uma inclusão representada pelas setas (muitos para um). No nível ainda mais abstrato temos uma unidade de quatro unidades de "3 uns" (1×4×3).

Nesta Figura 4 não são só as elipses a evidenciar as relações de inclusão, mas também as setas, mostrando assim diferentes níveis de abstração. Este exemplo mostra que a natureza da unidade é crucial. Para ajudar a concetualizar essa "nova" ideia de unidade pode-se apontar para a noção de quantidade intensiva proposta por Schwartz, ou para o modo como Vergnaud integra a multiplicação e divisão nas relações de proporcionalidade e, portanto, em relações quaternárias, onde há sempre uma quantidade que está relacionada a uma unidade, como se verá mais à frente nesta dissertação.

Para além do problema de como se forma o raciocínio multiplicativo na criança, a investigação insiste no modo como se faz a transição do campo aditivo para o multiplicativo.

O estudo de Clark e Kamii (1996), de onde se retirou as figuras acima mostradas, relata a investigação onde se procurou descobrir diferentes níveis na forma como as crianças lidam com situações multiplicativas. Fiona Ruth Ell, na sua tese de doutoramento em 2005, para além de se referir ao texto de Clark e Kamii (1996) compara os resultados dos estudos de Anghileri (1989), Kouba (1989), Mulligan e Mitchelmore (1997), Mulligan e Wright (2000), e Jacob e Willis (2003). As diferenças entre todos estes estudos são mais formais do que reais. Ell (2005) mostra isso mesmo; cada estudo define diferentes etapas, umas coincidem, outras incluem-se ou outras subdividem-se.

É importante considerar também a dificuldade em realizar um estudo que possa mostrar sem sombra de qualquer dúvida o modo como surge o pensamento multiplicativo. Quanto mais novas são as crianças, mais dificuldade há na comunicação entre elas e o investigador (distinguir claramente o significado de "mais" de "vezes mais"), e quanto mais elas avançam na idade mais sujeitas estiveram a variáveis "exteriores" nomeadamente à escolarização. O que se pode ter como certo é que a forma como o ensino promove o pensamento multiplicativo é determinante (Clark & Kamii, 1996). Estas investigadoras consideraram importantes duas conclusões do estudo que fizeram: o pensamento multiplicativo aparece cedo e desenvolve-se muito lentamente. Por um lado 45% dos alunos do 2.º ano que entrevistaram conseguiram lidar multiplicativamente com as tarefas apresentadas, mas apenas 49% dos alunos do 5.º ano conseguiram a mesma proeza.

Num texto de Stephanie Z. Smith e Marvin E. Smith (2006) é relatada uma investigação que pretendia comparar o entendimento da multiplicação por alunos que seguiam currículos diferentes, um dos quais dava grande importância à memorização da tabuada como condição para o desenvolvimento da capacidade de lidar com situações multiplicativas, enquanto o outro procurava uma abordagem mais concetual da multiplicação. Entre as diferentes tarefas que pediram aos alunos, algumas propunham que eles inventassem problemas (*story problems*) para expressões numéricas. Neste trabalho são exemplificadas formulações de problemas com estruturas tipicamente aditivas (Smith & Smith, 2006, p. 46)

A. "Sue tinha 4 velas e Tamara tinha 8. Quantas elas tinham ao todo?"
B. "Bobby tinha 4 cromos de *baseboll*. Ele conseguiu 3 vezes mais do que ele já tinha. Quantos ele tem ao todo?"
C. "Josh tinha 3 cromos de *baseboll* e seu amigo tinha 4. Quantos teriam se eles tivessem multiplicado esses números?"

A primeira (A) é uma situação de parte-todo, o referente das quantidades das partes e do todo é sempre o mesmo: velas.

A segunda (B) é uma situação de multiplicação por um escalar (multiplicador) mas onde a resposta se obtém depois de adicionar o produto (4×3) ao multiplicando (4). Corresponde a uma das categorias das estruturas aditivas descritas por Vergnaud (1990) que se pauta por uma transformação de um estado inicial para um estado final.

A terceira (C) é uma situação de parte-todo conceptualmente aditiva, pois tantos os fatores (parcelas) como o produto (soma) têm o mesmo referente (cromos de basebol) mediada pela multiplicação, mas na qual o produto não faz sentido pois não conduz à resposta.

5.1. O campo concetual das estruturas multiplicativas

Do ponto de vista de Gérard Vergnaud (1994) as estruturas multiplicativas são um campo concetual que abarca um largo conjunto de situações e conceitos intimamente ligados. Os conceitos ganham sentido dentro de um vasto leque de situações e dentro de uma situação há vários conceitos envolvidos. Não é, portanto, possível analisar o campo concetual das estruturas multiplicativas sem englobar, por um lado, o conjunto de situações e, por outro, o conjunto de conceitos e teoremas que lhe são próprios. A análise que Vergnaud faz das situações multiplicativas e a classificação que daí resulta difere das acima apresentadas por se basear, essencialmente, nos conceitos e teoremas matemáticos necessários para lidar com as situações. Entre os vários conceitos necessários estão, por exemplo, os de proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de medidas, combinação e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor. Entre os teoremas que envolvem estes conceitos são essenciais as propriedades de isomorfismo da função linear, as propriedades respeitantes ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas e as propriedades particulares da bilinearidade (Vergnaud, 1990).

Os alunos podem não ser capazes de formalmente explicitar as definições e enunciados dos conceitos e teoremas, embora os usem quando resolvem os problemas nos quais estão implícitos. Por serem implicitamente usados pelos alunos, não sendo estes capazes de explicitar corretamente as suas definições e enunciados, Vergnaud designa-os por conceitos-em-ação e teoremas-em-ação. São conceitos e processos matemáticos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas ou outras situações problemáticas.

Dentro do campo das estruturas multiplicativas, Vergnaud (1983) define três classes principais de situações consoante os conceitos e teoremas nelas envolvidos: Isomorfismo de medidas, Produto de medidas e Múltipla proporção.

O Isomorfismo de medidas compreende as situações de proporcionalidade direta simples entre duas grandezas. São problemas de partilha equitativa, preço constante, velocidade uniforme ou velocidade média constante, a densidade constante numa linha, numa superfície, ou em um volume. Encontram-se quatro subclasses de problemas na classe do Isomorfismo de medidas correspondendo a quatro estruturas (Vergnaud, 1983). A Figura 5 mostra cada uma destas subclasses, em que M_1 e M_2 correspondem a duas grandezas, as letras *a*, *b*, *c* representam os dados dos problemas e o ponto de interrogação corresponde à incógnita expressa na pergunta.

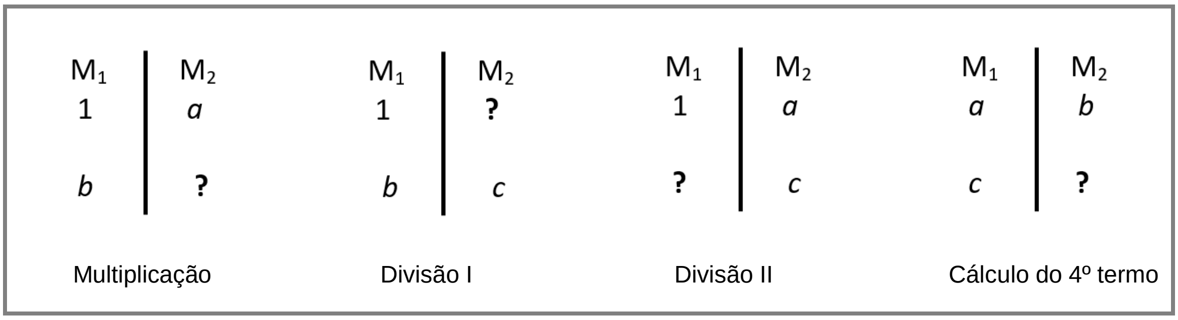


Figura 5: Representação dos esquemas que traduzem as operações envolvidas nas subclasses do Isomorfismo de medidas.

O conjunto de situações abrangida pelo caso geral da proporcionalidade (esquema à direita na Figura 5), que Vergnaud (1997) designa por “Cálculo do quarto termo”, distingue-se dos restantes, entre outros aspetos, pelo facto do primeiro termo ser diferente de 1. Compreende-se então que as operações de multiplicação e divisão sejam consideradas por Vergnaud como casos particulares de proporcionalidade direta, nos quais o primeiro termo é igual a 1. Os procedimentos para resolução destas situações dentro do Isomorfismo de medidas assentam nas propriedades da função linear:

- a forma canónica da função linear em que *k* é a constante de proporcionalidade

$$f(x) = kx$$

- as propriedades de isomorfismo

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$
$$f(ax) = af(x)$$

Considere-se, por exemplo, o seguinte problema: Uma loja vende conjuntos de 4 iogurtes por 1,60€. Qual o custo de 24 iogurtes iguais? Esta situação enquadra-se na subclasse *Cálculo do quarto termo* do Isomorfismo de medidas. O cálculo do quarto termo envolve duas operações, uma de divisão e outra de multiplicação. Usando o procedimento da regra de três simples escrever-se-ia:

i) $x = \frac{24 \times 1{,}60}{4}$ que é equivalente a ii) $x = \frac{24}{4} \times 1{,}6$ ou iii) $x = 24 \times \frac{1{,}6}{4}$

As duas últimas expressões (ii e iii) dão visibilidade a dois procedimentos distintos. A Figura 6 mostra uma representação que permite visualizar os dois processos para se encontrar o valor de *x* e que estão relacionados com propriedades da função linear acima enunciadas: por um lado, a multiplicação de 24 pela constante de proporcionalidade (1,6/4), que Vergnaud designa por operador funcional, e que corresponde a *f(x)=kx*; por outro lado a multiplicação de 1,6 por um operador escalar (24/4), que corresponde ao isomorfismo *f(ax)=af(x)*.

O isomorfismo diz respeito ao facto de que a relação multiplicativa (×6) verificada dentro da grandeza (nº de iogurtes) poder ser aplicada na grandeza custo dos iogurtes. Ou seja, o custo de 24 iogurtes é também 6 vezes mais que o custo de 4 iogurtes (setas verticais). Desse modo pode escrever-se que *x*=6×1,60. O operador escalar ×6 , segundo Vergnaud, não tem dimensão por se tratar de uma razão entre quantidades da mesma espécie (da mesma grandeza), neste caso, cardinais de conjuntos de iogurtes.

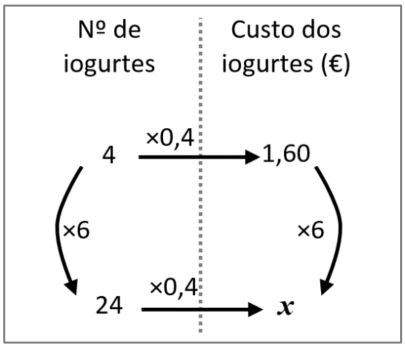


Figura 6: Representação de relações numa situação de proporcionalidade direta na classe do Isomorfismo de medidas.

O operador funcional, que corresponde à constante de proporcionalidade, resulta da razão entre quantidades das duas grandezas, neste caso, a razão entre o custo dos iogurtes e o número de iogurtes (1,60/4), que na Figura 6 está representada pela seta horizontal superior e que se aplica a 24 iogurtes para se obter o custo correspondente. Contrariamente ao operador escalar, que não tem dimensão, este operador funcional tem dimensão (Vergnaud, 1983), que neste caso é euros por número de iogurtes. Enquanto o operador escalar depende e varia com os dois valores dados na grandeza número de iogurtes, o operador funcional é uma constante que se aplica a qualquer valor da grandeza "número de iogurtes" para se obter o valor correspondente na grandeza "custo dos iogurtes". No exemplo apresentado na Figura 6 os dados envolvidos permitem identificar facilmente o operador escalar, o que torna supérflua a aplicação formal da regra de três simples.

Vergnaud (1983) diz que a designação "Isomorfismo de medidas" dada a esta classe de problemas resulta da sua observação da preferência natural de muitos alunos pelo processo de resolução que usa as propriedades de isomorfismo da função linear na resolução deste tipo de problemas.

Considere-se agora outro problema que se enquadra nas situações de multiplicação dentro do Isomorfismo de medidas e os problemas de divisão de tipo I e II que lhe correspondem:

i) Multiplicação: A Maria quer embalar bombons em 12 caixas, colocando 8 bombons em cada caixa. Quantos bombons ficarão embalados?

ii) Divisão I: A Maria quer embalar 96 bombons em 12 caixas, tendo todas o mesmo número de bombons. Quantos bombons ficarão em cada caixa?

iii) Divisão II: A Maria quer embalar 96 bombons em caixas com 8 bombons em cada uma. De quantas caixas precisa?

A Figura 7 mostra as representações de cada um dos problemas acima expostos.

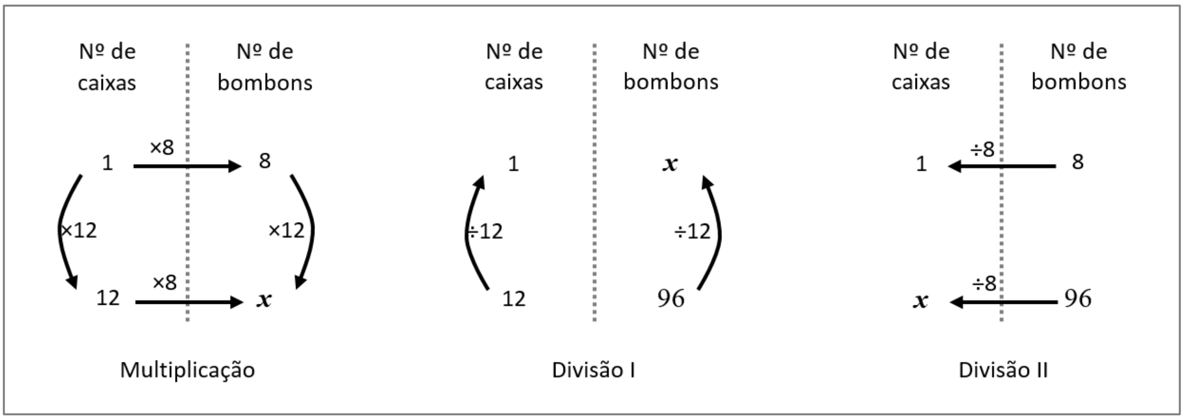


Figura 7: Representações dos problemas de multiplicação e divisão de tipo I e divisão de tipo II enquadrados na classe de situações do Isomorfismo de medidas.

A representação da multiplicação ilustrada na Figura 7 pretende mostrar os dois processos de resolução do problema já acima enunciados. Por um lado, x pode ser determinado pela multiplicação de 8 pelo operador escalar 12, isto é 12×8=96. Por outro lado, x pode ser determinado pela multiplicação de 12 pelo operador funcional 8, isto é 8×12=96. À primeira vista pode parecer que os dois procedimentos resultam da propriedade comutativa da multiplicação e que, portanto, são equivalentes, mas isto só é verdade se 8 e 12 forem encarados como números puros, sem ter em conta as grandezas a que estão referidos.

O procedimento representado pela expressão 12×8=96 traduz o raciocínio de que o número de bombons em 12 caixas é 12 vezes maior que o número de bombons em uma caixa, e pode-se escrever 12×8 bombons = 96 bombons. O operador ×12 é o multiplicador e 8 bombons é o multiplicando. Quer dizer que os 96 bombons resultam duma reunião de todos os bombons contidos nas 12 caixas. A adição repetida de parcelas iguais (de 8 bombons, 12 vezes) é usada com frequência para iniciar os alunos na multiplicação, mas Vergnaud (1983) ressalva que isso não corresponde verdadeiramente a um raciocínio multiplicativo. Também já foi acima referido que uma concetualização da multiplicação como adição repetida de parcelas iguais leva à conceção errada de que o produto da multiplicação é sempre maior que os fatores.

O procedimento representado pela expressão 8×12=96 carece de sentido porque não é concebível que 8 vezes 12 caixas resulte em 96 bombons. A aplicação do operador funcional ×8, que se observa na seta horizontal superior, a 12 caixas é possível porque ele corresponde à constante de proporcionalidade que resulta da razão entre duas quantidades de espécie diferente, neste caso número de bombons pelo número de caixas. Na perspetiva de Schwartz (1988), este operador é uma quantidade intensiva cujo referente é "número de bombons por caixa". Daí se escreveria 8 bombons/caixa × 12 caixas = 96 bombons.

Na divisão de tipo I (ver Figura 7) pretende-se determinar o número de bombons em cada caixa, sabendo que existem 96 bombons para 12 caixas. Alcançar este objetivo corresponde a inverter o operador escalar (×12) que relaciona as quantidades presentes na grandeza número de caixa, aplicando-o ao número de bombons contidos em 12 caixas. Ou seja, o número de bombons em uma caixa é 12 vezes menor que o número de bombons em 12 caixas. A dificuldade das crianças em fazer a inversão do operador escalar (×12 para ÷12) leva a que pensem quantas vezes 12 cabe em 96, muitas vezes por tentativa e erro. Este procedimento é tão mais usado quanto os números envolvidos se relacionem facilmente de uma forma multiplicativa.

Na divisão de tipo II (ver Figura 7) procura-se determinar o número de caixas necessárias para embalar os 96 bombons, sabendo que 8 é o número de bombons existentes numa caixa. Isto pode fazer-se invertendo o operador funcional ×8 que relaciona uma caixa com 8 bombons, e aplicar ÷8 a 96 bombons. Este procedimento é difícil de compreender pelas crianças mais novas e, por isso, preferem encontrar o operador escalar que relaciona 8 bombons com 96 bombons (×12) e aplicá-lo ao número de caixas, ou seja, o número de caixas é tantas vezes maior que uma caixa quanto 96 é maior que 8.

De acordo com a classificação apresentada por Greer (1992), a divisão de tipo I corresponde à divisão de partilha equitativa, e a divisão de tipo II corresponde à divisão de medida.

As situações enquadradas na classe Produto de medidas definida por Vergnaud envolvem os problemas cuja estrutura consiste na composição cartesiana de duas grandezas numa terceira e problemas de cálculo de áreas, volumes, e outras grandezas físicas. Um exemplo da composição cartesiana de uma grandeza pode ser dado pelo problema muito comum atualmente nos primeiros anos de escolaridade, onde se procura determinar um conjunto das diferentes maneiras de vestir pelo produto do conjunto de diferentes camisolas pelo conjunto de diferentes calções que podem ser usados. Outro exemplo é a medida da área de um retângulo que é o produto de duas medidas correspondentes a duas dimensões, a largura e o comprimento.

Na situação da composição de diferentes maneiras de vestir, a unidade de medida é um par calção-camisola que é função de 1 calção e 1 camisola. No mesmo sentido, Vergnaud (1983) afirma que, no caso da área, a unidade de medida $1m^2$ está em função de 1m (largura) e 1m (comprimento). Este modo de composição da unidade de medida marca distinção entre as situações envolvidas nesta classe das que pertencem à Múltipla proporção.

Nestas situações do Produto de medidas, estão em jogo três variáveis e, por isso, é mais fácil visualizar as relações numa tabela de dupla entrada, em vez das tabelas de simples correspondência usadas nas situações do Isomorfismo de medidas. A Figura 8 apresenta duas situações, I - a área de um quarto (retangular) a partir do comprimento e da largura; II – o número de diferentes modos de combinar 3 calções (A, B, C) com 4 camisolas (D, E, F, G).

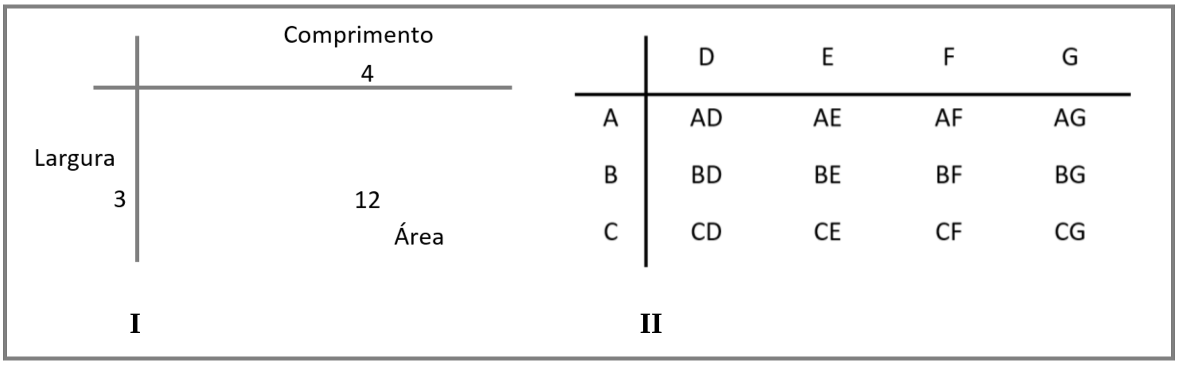


Figura 8: Representação das relações multiplicativas em situações de Produto de medidas: situação I referente à area, situação II referente ao produto cartesiano (Vergnaud, 1983).

Vergnaud chama a atenção para o facto de algumas situações poderem ser analisadas tanto do ponto de vista do Isomorfismo de medidas como do ponto de vista do Produto de medidas. É o caso, por exemplo da velocidade que resulta do produto da distância pelo tempo.

Há duas subclasses de problemas na classe Produto de medidas: multiplicação e divisão. Diferentemente do que se passa no Isomorfismo de medidas, há apenas um tipo de divisão na qual se procura um fator sabendo o produto e o outro fator.

As situações enquadradas na classe Múltipla proporção definida por Vergnaud envolve os problemas com uma estrutura semelhante à estrutura do Produto de medidas porque, do ponto de vista aritmético, estão em relação três variáveis, uma das quais é proporcional a outras duas variáveis independentes. A diferença está em que cada uma das três grandezas envolvidas tem um significado próprio que não resulta do produto de outras duas, como é o caso da área ou do volume. Um exemplo de problemas com esta estrutura é o da despesa que um número de pessoas faz num determinado número de dias: "Um grupo de 4 pessoas decidiu passar 13 dias num hotel. O preço por pessoa é 35€ por dia. Qual será o montante da despesa?" (Vergnaud, 1983). A Figura 9 representa esta situação.

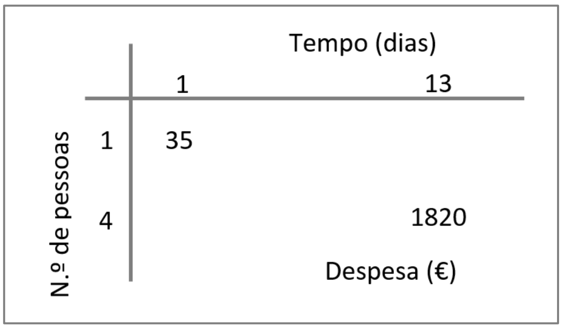


Figura 9: Representação das relações multiplicativas em situações de Múltipla proporção.

Nesta classe de problemas de múltipla proporção, Vergnaud (1983) dá exemplo de três subclasses de problemas: multiplicação e dois tipos de divisão: a divisão de tipo I, em que se pretende saber o valor por unidade (neste caso, a despesa por pessoa por dia) sabendo o produto (despesa total) e dois fatores (o n.º de pessoas e o número de dias), e a divisão de tipo II em que se pretende saber um dos fatores (ou o n.º de pessoas ou o número de dias) sabendo o produto (despesa total), o valor por unidade (neste caso, a despesa por dia e pessoa) e o outro fator (ou o n.º de dias, ou o número de pessoas.

Greer (1992) inclui sete das suas categorias na classe de situações abrangidas pelo Isomorfismo de medidas de Vergnaud: Grupos iguais, Medidas iguais, *Rate*, Conversão de medidas, Comparação multiplicativa, Parte-todo e Mudança multiplicativa. No entanto, é preciso notar que só podem ser incluídas no Isomorfismo de medidas as situações em que há duas variáveis que se relacionam proporcionalmente. Uma situação problemática envolvendo a comparação multiplicativa entre a idade de duas pessoas não é uma situação de proporcionalidade: se a Maria tiver 12 anos e o Manuel tiver 18, pode dizer-se que o Manuel é 1,5 vezes mais velho que a Maria, mas esta razão (1,5) não se mantém igual no ano seguinte, isto é, quando a Maria tiver 13 anos e o Manuel 19. Para além do contexto não ser multiplicativo é discutível o número de variáveis presentes na situação. Há quatro classes definidas por Greer cuja inclusão no Isomorfismo de medidas merece reflexão. Apresentam-se de seguida as quatro situações dadas por Greer (1992, p. 280) como exemplos dessas quatro classes.

a) Conversão de medidas: "Uma polegada é aproximadamente 2,54 centímetros. Quanto aproximadamente mede em centímetros 3,1 polegadas?"
b) Comparação multiplicativa: "A densidade do ferro é 0,88 da densidade do cobre. Se um pedaço de cobre tem uma massa de 4,2 kg, qual é a massa de um pedaço de ferro com o mesmo volume do pedaço de cobre?"
c) Parte todo: Uma faculdade passou 3/5 dos seus alunos num exame. Se 80 alunos fizeram o exame, quantos passaram?
d) Mudança multiplicativa: "Um pedaço de elástico pode ser esticado para 3,3 vezes o comprimento original. Qual é o comprimento de uma peça de 4,2 metros de comprimento quando totalmente esticada?"

Como se pode ver, nas alíneas a) e d) a grandeza é comprimento, na alínea b) é massa e na alínea c) é o cardinal de um conjunto. A diferença entre a situação na alínea b) e a da alínea d) está nos referentes: na alínea b) a massa refere-se a dois materiais diferentes enquanto na alínea d) é o mesmo material; daí a diferença entre "comparação" e "mudança".

Na alínea c) os alunos pertencem ao mesmo conjunto, ou melhor, o conjunto dos alunos que passaram no exame é um subconjunto do conjunto dos alunos que foram a exame e, portanto, é lícito questionar se há duas variáveis de grandeza ou dimensão diferente. Além disso é também forçado considerar que o contexto pode ser modelado pela proporcionalidade, isto é, 3/5 será sempre a razão entre qualquer número de alunos que passam e os que vão a exame?

Na alínea a) a grandeza é a mesma, mas é significativo o facto de serem diferentes as unidades de medida. A situação de conversão de unidades de medida (dentro da mesma grandeza), é um contexto de proporcionalidade.

Com exceção da alínea a), não há grandes dúvidas que impeçam considerar que as duas medidas estão relacionadas por um escalar que não tem dimensão porque é uma razão entre duas medidas da mesma espécie (Vergnaud, 1983, p. 130). Schwartz (1988, p. 49-50) critica esta posição atribuindo um referente a este operador, assemelhando-o ao fator de conversão de medidas. No caso da situação a) o fator é 2,54 cm/in, na alínea b) 0,88 Kg/Kg, na alínea c) 3/5 aluno/aluno e na alínea d) 3,3 m/m. Para que estas quatro situações possam ser enquadradas no Isomorfismo de medidas, se bem se interpreta, cada uma das medidas tem de referir-se a espaços de medidas diferentes e o operador tem de ser considerado não um escalar mas um operador funcional, como se mostra na Figura 10. Assim, por exemplo, uma situação em que se diz que o José recebe o dobro do ordenado do Manuel tem de se considerar que a variável não é apenas o dinheiro, mas o dinheiro do José e o dinheiro do Manuel. Para além disso é preciso que a relação "dobro" seja um operador funcional, i.e., seja a constante de proporcionalidade e não um operador escalar.

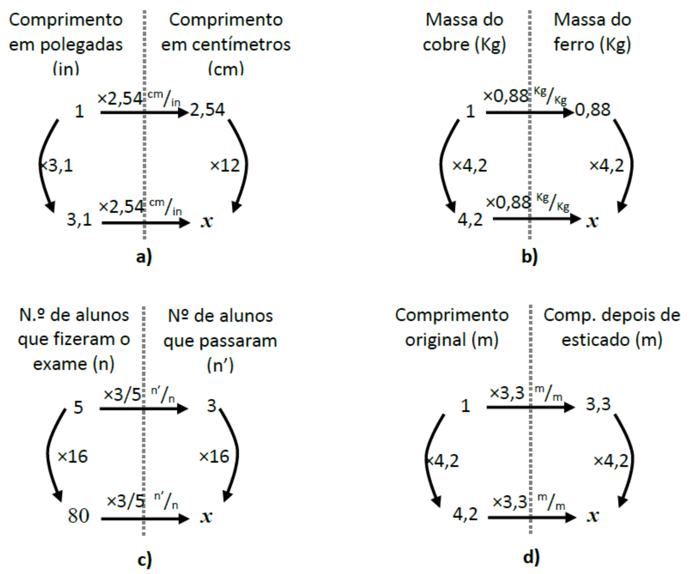


Figura 10: Representação dos esquemas de isomorfismo de medidas para quatro das situações apresentadas por Greer (1992).

5.2.Multiplicação e divisão: operações transformadoras do referente

Judah Schwartz (1988) faz uma análise das situações que envolvem a multiplicação e a divisão com base no seu argumento de que os números, considerando a Matemática enquanto modelação da realidade, não podem ser desligados dos seus referentes. Neste sentido, os números que resultam de procedimentos de contagem, de medição ou de cálculos subsequentes, referem-se sempre a uma grandeza ou propriedade mensurável da realidade. A contagem é um procedimento ao qual se recorre, em geral, para quantificar grandezas[7] discretas, enquanto a medição é um procedimento ao qual se recorre para quantificar grandezas contínuas (Schwartz, 1996). Assim, a estrutura de uma quantidade,

[7] Usa-se aqui a palavra "grandeza" para referir propriedades mensuráveis de objetos (comprimento, área, massa,…) ou o que define (em compreensão), um conjunto: conjunto *de bolas*, *de cadeiras*,….

em geral, pode ser representada por {medida, propriedade}. No caso de grandezas discretas, a estrutura é representada por {cardinal do conjunto, definição do conjunto}, por exemplo, {3, bolos}. No caso de grandezas contínuas, a estrutura representa-se {(magnitude, unidade), propriedade}[8], por exemplo, {(75 , cm), altura de uma mesa}.

Sobre as quantidades resultantes de contagens ou de medições é possível definir um conjunto de operações binárias que geram outras quantidades que podem estar associadas, ou não, a novos referentes.

A composição de uma quantidade a partir de outras duas pode assumir duas formas: a composição que preserva o referente e a composição que transforma o referente. A adição e a subtração são operações associadas à composição de quantidades que preservam o referente e a multiplicação e a divisão estão associadas à composição de quantidades que transformam o referente. Considere-se, por exemplo, a situação de adicionar 3 metros a 4 metros. O resultado da adição será também dado em metros. Quer dizer que o referente se manteve. Mas o resultado da multiplicação de 3 metros por 4 metros é dado em metros quadrados, quer dizer que houve uma transformação do referente. Outro exemplo da transformação do referente pode ser o produto de 3 caixas por 4 bolos existentes em cada caixa. O resultado não é "caixas" nem "bolos por caixa" mas "bolos".

A composição que transforma o referente (multiplicação ou divisão) implica a distinção fundamental de duas espécies de quantidades: intensivas e extensivas. As quantidades intensivas não resultam da contagem ou medição direta, mas são resultado da divisão. Uma quantidade intensiva é, por exemplo, o preço por quilograma, por litro,… a velocidade (metros por segundo),… tratando-se assim de uma relação entre quantidades de espécies diferentes onde o valor de uma está em função do valor de outra. A palavra "por" está na maioria das vezes presente da descrição de uma quantidade intensiva. De acordo com Schwartz (1988), há que considerar diferentes tipos de quantidades intensivas conforme resultem:

i) da divisão de duas grandezas discretas (D/D), por exemplo, o número de bolos por caixa;
ii) da divisão de uma grandeza contínua por uma discreta (C/D), por exemplo, litros por recipiente, ou, ao contrário, discreta por contínua (D/C), por exemplo, um número de ocorrências por hora;
iii) da divisão de duas grandezas contínuas (C/C), por exemplo, um número de quilómetros por um número de horas.

Ao ter em conta o significado atribuído aos números, identificando quantidades intensivas e extensivas, Schwartz faz uma análise semântica das operações, isto é, procura definir as operações

[8] "Magnitude" é a tradução literal do original. Refere-se à medida, o número de vezes que a unidade de medida cabe na grandeza que se mediu.

sem as desligar dos seus referentes e dos contextos que modelam. No caso da multiplicação e divisão, define três grupos semânticos, ou melhor, como diz, tríades semânticas, uma vez que são postas em relação três quantidades que podem ser intensivas (I) ou extensivas (E). Assim, considera as tríades:

i) I E E' – uma quantidade intensiva e duas extensivas,

ii) E E' E´´ – três quantidades extensivas,

iii) I I' I'' – três quantidades intensivas.

A Tabela 1 (na pág. 43) procura exemplificar, apresentando algumas situações modeladas pela multiplicação, tendo em consideração cada umas das tríades e a natureza contínua ou discreta das grandezas.

Há uma diferença que é importante considerar entre as situações modeladas pela multiplicação com quantidades discretas e as que ocorrem com quantidades contínuas dentro da tríade IEE':

i) multiplicação envolvendo grandezas discretas – Existem 60 rodas (E') em 15 carros (E) se cada carro tiver 4 rodas (I);

ii) multiplicação envolvendo grandezas contínuas – Gasto 1,40€ (E') em 250g de fiambre (E) se o preço do fiambre for 5,60€/Kg (I).

Repare-se que, na primeira situação, o cálculo do número de rodas existentes num conjunto de 15 carros tendo cada carro 4 rodas pode ser representado por uma adição repetida de 15 parcelas iguais (4 rodas + 4 rodas + … + 4 rodas = 60 rodas). Mas, na segunda situação, o cálculo do custo do fiambre envolve a multiplicação 0,25×5,60 que não pode ser representada por uma adição repetida. Em suma, não é concebível como adição repetida uma situação em que o multiplicador não é um número inteiro. Esta questão que se passa com a multiplicação também acontece na divisão. Quando estão envolvidas duas grandezas discretas (distribuir um número de bombons por um número de caixas) é possível uma melhor ou mais fácil visualização da operação de partilha. Pelo contrário, é concetualmente mais complexo visualizar a divisão de partilha equitativa de duas grandezas contínuas, por exemplo, dividir um número não inteiro de quilómetros por um número não inteiro de horas. Esta diferença tem influência no ensino da multiplicação. A multiplicação representada por uma adição repetida conduz à conceção errónea de que o produto é sempre maior do que os fatores, (se ambos maiores que 1), e a divisão como a operação cujo resultado é sempre menor (pelo menos, do que o dividendo).

Há ainda outra questão importante que tem a ver com a natureza de uma quantidade intensiva. As quantidades intensivas não são passíveis de ser adicionadas porque, seguindo como exemplo a primeira situação acima referida, a quantidade intensiva 4 rodas por carro caracteriza o conjunto dos carros tidos na situação, independentemente do número de carros. Dito de outro modo, se, na situação apresentada, há 4 rodas por carro no conjunto dos 15 carros, também existem 4 rodas por carro se o cardinal do conjunto dos carros for 30 carros. Imagine-se que ao conjunto dos 15 carros cuja característica é terem 4 rodas por carro, foi adicionado um outro conjunto de 15 carros também caracterizado por haver 4 rodas em cada carro; os 30 carros do novo conjunto não são caracterizados por terem 8 rodas por carro. Quatro rodas por carro caracteriza tanto um carro como dois carros ou quatro carros, etc. Portanto, quando se representa aditivamente a situação de 15 carros terem 60 rodas havendo 4 rodas por carro, o que se adiciona repetidamente são quantidades extensivas 4 rodas + 4 rodas +…+ 4 rodas e não as quantidades intensivas 4 rodas por caro + 4 rodas por carro +…+ 4 rodas por carro que resultaria, erradamente, em 60 rodas por carro. A situação da compra do fiambre (acima apresentada) é outro bom exemplo para se compreender a natureza das quantidades intensivas. O preço do fiambre é 5,60€/Kg independentemente da quantidade de fiambre que se compra. Se comprar 1 quilograma (quantidade extensiva) gasto 5,60€ (quantidade extensiva) sendo 5,60€ o preço por quilograma (quantidade intensiva). Se comprar 2 quilogramas (quantidade extensiva) gasto 11,20€ (quantidade extensiva) se o preço do fiambre se mantiver igual 5,60€/Kg (quantidade intensiva).

Tabela 1: Exemplos de situações modeladas pela multiplicação para cada tríade semântica, tendo em conta quantidades discretas e contínuas.

	I×E=E’	E×E’=E’’	I×I’=I’’
Grandezas. Discretas	Existem 60 rodas (E’) em 15 carros (E) com 4 rodas por carro (I).	Existem 12 maneiras diferentes de combinar calções e camisas (E’’) se houver 3 calções (E’) diferentes e 4 camisas (E) diferentes.	Numa pastelaria, existem 24 velas por caixa (I’’) havendo 4 bolos por caixa (I’) e 6 velas por bolo (I).
Grandezas. Contínuas	Gasta-se 2,5h (E’) para fazer 200 Km (E) à velocidade média de 80Km/h.	Um quarto tem $8m^2$ de área (E’’), tendo 2,5m de largura (E’) por 3,2m de comprimento (E).	Um carro gasta 7,2*l*/h de combustível (I’’) viajando à velocidade média de 90Km/h (I’), consumindo 0,08*l*/Km (I).
Grandezas. Discretas e Contínuas	São precisos 10 mosaicos (E) com $0{,}9m^2$ por mosaico (I) para pavimentar $9m^2$ (E’).		Numa loja, existem 5,4*l* de leite por embalagem (I’’), havendo 27 pacotes de leite por embalagem (I’) e 200ml de leite por pacote (I).

Veja-se agora o que se passa com as situações modeladas pela divisão. Nas tríades semânticas EE’E’’ e II’I’’ há um único tipo de divisão, isto é, na tríade EE’E’’ a divisão de duas quantidades extensivas resulta noutra quantidade extensiva; na tríade II’I’’ a divisão de duas quantidades intensivas resulta numa quantidade intensiva. Mas na tríade IEE’ há dois tipos de divisão: a divisão das duas quantidades extensivas resulta numa quantidade intensiva (E’÷E=I), e a divisão de uma quantidade extensiva por uma intensiva resulta numa quantidade extensiva (E'÷I=E). Na Tabela 2 mostram-se exemplos de problemas modelados pela divisão na tríade IEE', para cada uma das situações apresentadas na Tabela 1 (na pág. 43), modeladas pela multiplicação.

Tabela 2: Exemplos de problemas modelados pela divisão para cada situação modelada pela multiplicação dentro da tríade IEE'.

	I×E=E'	E'÷E=I	E'÷I=E
Quant. Discretas	Existem 60 rodas (E') em 15 carros (E) com 4 rodas por carro (I).	Quantas rodas tem cada carro se houver 60 rodas em 15 carros, sabendo que os carros têm igual número de rodas?	Qual é o número de carros num parque de estacionamento onde 60 rodas pertencem ao conjunto dos carros, tendo cada carro 4 rodas?
Quant. Contínuas	Faz-se 200 Km (E') à velocidade média de 80Km/h em 2,5h.	A que velocidade média é preciso viajar para percorrer 200Km em 2,5h?	Quantas horas demoro a fazer 200Km a uma velocidade média de 80Km/h?
Quant. Discretas e Contínuas	Pavimento uma área de 9m^2 (E') com 10 mosaicos (E) tendo cada mosaico 0,9m^2.	Qual a área por mosaico se usar 10 mosaicos na pavimentação de 9m^2?	Quantos mosaicos preciso para pavimenta 9m^2 se cada mosaico tiver 0,9m^2 de área?

Como se pode compreender há outras situações multiplicativas que não estão representadas na Tabela 1 e na Tabela 2. Duas dessas situações merecem particular atenção. Uma das situações tem a ver com a conversão de unidades de medida e a outra relaciona-se com a comparação multiplicativa de duas quantidades.

Para a conversão de medidas, Schwartz (1988) dá como exemplo a conversão de medidas em polegadas para centímetros, enquadrando estas situações de conversão dentro da tríade IEE'. O fator de conversão é 2,54 centímetros por polegada (cm/in). Trata-se de uma quantidade intensiva. Para converter 15 polegadas em centímetros multiplica-se 15in por 2,54cm/in obtendo-se 38,1cm. Para converter centímetros em polegadas divide-se o número de centímetros pelo fator de conversão. Pode-se também saber o fator de conversão se se souber as duas medidas, uma em centímetros e outra em polegadas, que correspondam exatamente ao mesmo comprimento.

Uma situação de comparação multiplicativa entre duas grandezas da mesma espécie, expressas na mesma unidade é, por exemplo, a comparação entre a altura da torre de Belém (30m) com a torre dos Clérigos (75m). Assim se pode dizer que a torre dos Clérigos é 2,5 vezes mais alta do que a torre de Belém. A razão entre as duas alturas (2,5) comporta-se como um fator de conversão de unidades de medida, que não muda a natureza do referente, nem a unidade de medida, apenas altera a magnitude da medida (de 30m para 75m). Pode assumir-se que este fator (2,5), pelo qual se multiplica a altura da torre de Belém para obter a altura da torre dos Clérigos, é um escalar que não tem referente, ou seja, é simplesmente um número (Vergnaud, 1983, 1988). Mas Schwartz afirma que se pode atribuir um referente a este fator escalar, tratando-o como uma quantidade intensiva (cf. Schwartz, 1988, p.49-50). Neste caso seria 2,5m/m (2,5 metro por metro). A multiplicação 30m × 2,5m/m = 75m enquadrar-se-ia, assim, na tríade IEE'. Há, contudo, uma questão que não pode ser ignorada e que entra em conflito com a tomada da multiplicação e da divisão como operações que transformam o referente. Tome-se como exemplo a situação: "O António tinha 5 berlindes antes de uma partida em que ganhou o dobro dos berlindes que tinha. Quantos berlindes ganhou o António nessa partida?" Esta situação, que se resolve multiplicando 5 berlindes por 2, resulta em 10 berlindes, ou seja, não há transformação do referente.

5.3. Os sentidos da multiplicação e divisão em contexto

Brian Greer (1992) faz uma análise das situações modeladas pela multiplicação e divisão assente na semântica das relações estabelecidas entre os dados presentes no contexto, suas representações e o tipo de números envolvidos.

Greer (1992) começa por apresentar as principais categorias de situações que envolvem os números inteiros e alarga depois esta classificação ao conjunto dos racionais. Define, em primeiro lugar, quatro categorias de situações multiplicativas envolvendo números inteiros: Grupos iguais, Comparação multiplicativa, Produto cartesiano e Área retangular (tomando apenas números inteiros para as dimensões comprimento e largura). Quando considera os números racionais apresenta mais seis categorias: Medidas iguais, *Rate*[9], Conversão de medidas, Parte-todo, Mudança multiplicativa e Produto de medidas.

Um aspeto essencial na classificação apresentada por Greer (1992) é a noção de simetria entre dois fatores numa multiplicação. Tomando como exemplo o problema "3 crianças têm 4 bolos cada uma. Quantos bolos têm ao todo?" (pág. 276) Greer distingue o multiplicando (número de bolos que cada criança tem) do multiplicador (número de crianças). O número por grupo (multiplicando) é

[9] De acordo com Thompson (1994), o conceito de rate não é consensual na literatura de investigação em Educação Matemática e afirma que, para Vergnaud (1988), rate é a razão entre duas quantidades de diferentes grandezas, p.ex.: distância/tempo, e, para Schwartz (1988), rate é uma quantidade intensiva, que se expressa como a razão entre uma quantidade e uma unidade de outra quantidade, p.ex., 90Km/h. Estas duas versões só diferem quando Schwartz considera que a razão entre duas quantidades da mesma espécie também é uma quantidade intensiva.

multiplicado pelo número de grupos (multiplicador) para se obter o total de bolos (produto). Esta diferença entre multiplicando e multiplicador traduz-se numa assimetria cuja consequência, devido à propriedade comutativa da multiplicação, é a existência de dois tipos de divisão: i) partilha, onde, sabendo o produto (número de bolos), o divisor é o multiplicador (número de crianças) e o quociente é o multiplicando (número de bolos por criança) e ii) medida, onde o divisor é o multiplicando (número de bolos por criança) e o quociente é o multiplicador (número de crianças). A divisão de partilha corresponde a uma distribuição equitativa de objetos por um número de grupos – divisão pelo multiplicador –, e a divisão de medida procura determinar o número de grupos de *n* objetos por grupo que existe no número total de objetos da mesma espécie – divisão pelo multiplicando.

Quando tal assimetria não acontece, isto é, quando se verifica que não faz sentido distinguir multiplicando de multiplicador, existe apenas um tipo de divisão. É o que caracteriza as situações de Produto cartesiano, Área retangular ou Produto de medidas. Um exemplo pode ser o problema em que se procura saber o número de pares de dançarinos (rapaz-rapariga) a partir de um número de rapazes e de um número de raparigas. O produto é o número de pares ordenados formados pela combinação de um elemento de um conjunto (rapazes) com um elemento de outro conjunto (raparigas). Consequentemente, na divisão, sabendo o número de pares, procurar saber o número de raparigas a partir de um dado número de rapazes, ou vice-versa, não se traduz numa diferença entre multiplicador e multiplicando. O mesmo acontece quando a situação envolve a área de um retângulo, ou outro produto de medidas. Por exemplo, sabendo que a área de um retângulo é $12m^2$, tendo como comprimento e largura 4m e 3m, respetivamente, a divisão que permite saber a medida do comprimento a partir da área e da medida da largura, não se distingue da divisão que procura determinar a largura sabendo a área e o comprimento.

Brian Greer (1992) não encerra a classificação que faz das situações, afirmando que não é exaustiva uma vez que outras classes de situações surgem quando se consideram, por exemplo, outros conjuntos numéricos. Sublinha também que a interpretação de uma situação depende do modo como os alunos a concebem pois, diz, uma situação que envolve o Produto cartesiano pode ser transposta para uma situação de Grupos iguais. Reconhece que uma pequena alteração no enunciado verbal pode conduzir a uma categorização diferente da situação. Dá como exemplo o problema já acima referido "3 crianças têm 4 bolos cada uma. Quantos bolos têm ao todo?" que enquadra na classe Grupos iguais, mas, se a formulação for "Se houver 4 bolos por criança, quantos bolos têm 3 crianças?", o problema é enquadrado na classe *Rate*. Repare-se que a única diferença é o modo como se expressa a quantidade intensiva referente ao número de bolos que cada criança possui. No primeiro caso a expressão é "4 bolos cada uma", e no segundo caso a expressão é "4 bolos por criança".

Tabela 3: Classes de situações modeladas pela multiplicação e divisão (adaptado de Greer, 1992)

Classes de situações	Multiplicação	Divisão de partilha (Divisão pelo multiplicador)	Divisão de medida (divisão pelo multiplicando)	Divisão, operação inversa da multiplicação
Grupos iguais	As folhas de cartolina colorida são vendidas em pacotes de 5. Quantas folhas de cartolina têm quatro pacotes?	Distribuí 20 cartolinas por 4 pacotes. Quantas cartolinas tem cada pacote?	Distribuí 20 cartolinas por pacotes com 5 cartolinas cada um. De quantos pacotes precisei?	
Medidas iguais (*Rate* – preço por unidade)	Quanto pagarei se comprar 4 livros iguais a 10,7€ por livro?	Paguei 42,8€ pela compra de 4 livros iguais. Qual o preço de cada livro?	Paguei 42,8€ pela compra de livros a 10,7€ cada. Quantos livros comprei?	
Disposição retangular	Se numa sala há 12 filas de cadeias com 8 cadeiras cada fila, quantas cadeiras há ao todo?	Se há 96 cadeiras numa sala, dispostas em 12 filas, quantas cadeiras tem cada fila?	Se há 96 cadeias dispostas em filas com 8 cadeiras cada uma, quantas são as filas?	
Comparação multiplicativa (multiplicação por um escalar)	O João tem triplo do dinheiro do António. Se o António tem 25€ quanto tem o João?	Se o João tem 75€ que é o triplo do dinheiro do António, quanto tem o António?	O João tem 75€ e o António tem 25€, quantas vezes mais dinheiro tem o João em relação ao António.	
Área (produto de medidas)	Um retângulo tem 5,4cm de comprimento e 3,2cm de largura. Qual a área do retângulo?			Um retângulo tem de área 17,28cm^2. Se o comprimento mede 5,4cm, quanto mede a largura?
Produto cartesiano (formação de todos os pares possíveis)	Tenho 4 camisolas e 5 saias. Quantas maneiras de vestir diferentes é possível fazer?			Faço 20 maneiras de vestir diferentes usando camisolas e saias. Se tiver 5 saias quantas são as camisolas?

Para a categorização proposta por Greer (1992), são também importantes as representações. Uma dada situação pode ser representada de diferentes formas, plasmando diferentes conceções, mas, para além de nem sempre ser possível representar convenientemente algumas quantidades (p. ex.: Km/h)[10], também nem sempre uma representação (gráfica, estática por natureza) consegue mostrar adequadamente a natureza dinâmica que a pode caracterizar.

A Tabela 3 (na pág. 47) apresenta uma classificação das situações que é inspirada na apresentada por Greer (1992). É preciso chamar a atenção para a diferença entre esta tabela e a original. A classe *Rate* foi agregada a Medidas iguais e a classe Mudança multiplicativa foi agregada à Comparação multiplicativa. Decidiu-se ainda não incluir nesta tabela as classes “Conversão de medidas”, “Parte/todo”. Na tabela apresentada por Greer (1992), as situações enquadradas pelas classes Comparação multiplicativa, Mudança multiplicativa, Conversão de medidas e Parte-todo são diferentes em termos de contexto, mas as grandezas que são comparadas, transformadas ou convertidas são da mesma natureza. Consideraram-se quatro tipos de operações: multiplicação, divisão de partilha, divisão de medida e divisão enquanto operação inversa da multiplicação. Esta última por se ter em conta as situações de divisão em que não se distingue multiplicando de multiplicador. Outra alteração foi integrar as situações da classe Rate nas situações de Medidas iguais, dando como exemplos situações de preço por unidade.

De acordo com Greer (1992), basta alterar o modo como se enuncia o multiplicando, passando de “5 crianças têm cada uma 2,5€…, para “em 5 crianças há 2,5€ por criança”, que a situação passa a incluir-se na classe Rate. Uma outra alteração ao quadro apresentado por Greer (1992) foi a criação de uma nova categoria, Disposição retangular, para se distinguir as situações de Área retangular, que envolvem grandezas contínuas (ou melhor, números racionais não inteiros), das que envolvem grandezas discretas, por exemplo, o cálculo de cadeiras dispostas retangularmente em filas e colunas.

[10] À semelhança do que diz Schwartz (1988) a propósito da dificuldade de representação da multiplicação enquanto adição repetida quando estão envolvidas grandezas contínuas.

6. Metodologia

Nesta secção apresenta-se e justifica-se a opção metodológica, a seleção dos participantes e os procedimentos de recolha e de análise dos dados.

6.1. A opção metodológica

Alguns investigadores que teorizam sobre metodologias de investigação evitam definir metodologia qualitativa e metodologia quantitativa em função do tipo de dados que são tidos em conta ou do modo como tais dados são analisados: dados linguísticos *versus* numéricos, análise do discurso *versus* análise quantitativa ou estatística. Considerar apenas tais aspetos para definir uma de outra metodologia conduziria a uma distinção simplista entre medir com palavras e medir com números (Elliott & Timulak, 2005). A dificuldade em definir "metodologia qualitativa" é reconhecida por Denzin e Lincoln (2005), afirmando que ela não chama a si nenhuma prática ou método particular, podendo fazer uso de diversos tipos de análises, tanto textuais como numéricas ou estatísticas, atravessando múltiplas disciplinas, desde as ciências naturais às ciências sociais, e não reivindica a pertença a um determinado paradigma. Estas autoras apresentam uma definição abrangente que estabelece a investigação qualitativa como uma prática situada de um observador inserido no mundo que estuda e transforma, em virtude das ferramentas interpretativas de que se mune – notas de campo, entrevistas, fotografias e outros registos áudio e visuais, etc. – e que tornam esse mundo visível.

A este nível, a investigação qualitativa envolve uma abordagem naturalista e interpretativa do mundo. Isto significa que os investigadores qualitativos investigam os objetos de estudo em seus ambientes naturais, tentando dar sentido ou interpretar fenómenos em termos dos significados que as pessoas lhes dão. (Denzin & Lincoln, 2005, p. 3)

O termo "naturalista" ligado à investigação qualitativa advém tradicionalmente por oposição aos ambientes laboratoriais e experimentais vulgarmente conotados com o paradigma positivista. Isto é sintomático de uma tentativa de muitos investigadores qualitativos se distanciarem do paradigma positivista associando-o à metodologia quantitativa.

O termo paradigma diz respeito ao conjunto de princípios ontológicos (natureza do objeto de conhecimento), epistemológicos (génese do conhecimento ou relação entre o sujeito e o objeto de conhecimento) e metodológicos (modo de alcançar o conhecimento) que orientam a investigação (Denzin & Lincoln, 2005). Sintetizando, Denzin e Lincon (2005) afirmam a existência de quatro principais paradigmas que orientam as metodologias qualitativas: "positivista e pós-positivista, construtivista-interpretativo, crítico (marxismo, emancipatório) e feminista-pós-estrutural" (pág. 22).

A consideração de que o paradigma positivista possa guiar a metodologia qualitativa é controversa e muitos autores discordam deste ponto de vista. Por exemplo, Hesse-Biber e Leavy (2011), embora reconhecendo que esta dicotomia possa dissipar-se, estabelecem uma comparação fraturante que remete a metodologia quantitativa para o paradigma positivista ainda que, dentro deste paradigma, se possa recorrer a ferramentas qualitativas[11] de recolha e análise de dados.

O positivismo postula que há uma realidade cognoscível que não pode depender do processo de pesquisa, que essa realidade é objetiva e governada por leis e que, portanto, é possível deduzir e provar relações de causalidade, identificar, explicar e prever acontecimentos (Hesse-Biber & Leavy, 2011). É do ponto de vista positivista que vem a maior crítica à metodologia qualitativa pois, ao contrário da pesquisa quantitativa, "a pesquisa qualitativa não requer variáveis bem definidas ou modelos causais. As observações e medições de estudiosos qualitativos não se baseiam na atribuição aleatória de sujeitos a grupos experimentais. Os pesquisadores qualitativos não geram 'provas concretas' usando tais métodos" (Denzin & Lincoln, 2005, p. 9). Hesse-Biber e Leavy (2011) afastam a possibilidade da metodologia qualitativa se desenvolver dentro do paradigma positivista. Concedem, sim, que projetos de investigação enquadrados teoricamente pelo pós-positivismo desenvolvam o trabalho assentes numa metodologia qualitativa:

O pós-positivismo afirma que a pesquisa sobre a realidade social só pode aproximar-se da realidade. Afastando-se da ideia positivista de provar relações causais que constituem o mundo social, os pós-positivistas constroem evidências para apoiar uma teoria preexistente. Em outras palavras, baseando-se na lógica dedutiva e no teste de hipóteses, assim como os positivistas, os pós-positivistas tentam criar evidências que irão confirmar ou refutar uma teoria, embora não em termos absolutos.

Para além da abordagem pós-positivista, Hesse-Biber e Leavy (2011) identificam ainda outras duas principais vertentes de abordagem à metodologia qualitativa – a interpretativa e a crítica – dentro das quais se posicionam diferentes perspetivas. As abordagens críticas preocupam-se com questões de poder e consideram que o conhecimento produzido pelas visões positivistas dá força e perpetua situações de injustiça social opressoras de grupos sociais minoritários. As abordagens interpretativas estão interessadas na compreensão dos significados construídos socialmente; pressupõem que os "significados não existem independentemente do processo interpretativo da pessoa humana" e procuram a sua "compreensão aprofundada pela interpretação dos significados que têm para as pessoas as interações, as ações e os objetos" (pág. 17). Esta visão das abordagens interpretativas está de acordo com o paradigma designado construtivista por Denzin e Lincoln

[11] Hesse-Biber e Leavy, assim como outros, distinguem metodologia de método. A metodologia supõe um conjunto de princípios teóricos sobre a génese, a natureza e os valores e limites do conhecimento. O método é uma técnica, uma ferramenta ou instrumento de recolha, de análise, de validação,… de dados.

(2005). Dentro deste paradigma construtivista-interpretativo considera-se que a realidade é múltipla e construída, a apropriação do conhecimento é subjetiva, pela interação entre objeto e sujeito do conhecimento, e a metodologia procura a compreensão e o significado.

Este estudo situa-se dentro de um paradigma interpretativo que supõe um papel determinante do investigador no processo de recolha de dados e, portanto, a subjetividade do conhecimento adquirido. O objeto essencial do estudo são processos desenvolvidos por sujeitos criteriosamente selecionados na realização de tarefas de formulação de problemas. Assim sendo, os dados tornam-se observáveis e são interpretados por meio da interação entre o investigador e os participantes no decorrer das entrevistas em torno da resolução de uma tarefa, ou na observação participante das aulas.

De acordo com Hesse-Biber e Leavy (2011) os estudos podem ter propósitos exploratórios, descritivos ou explanatórios. Um estudo é exploratório quando procura investigar uma área pouco explorada com um objetivo de recolher dados que poderão contribuir para outras investigações. Ter um propósito descritivo significa procurar conhecer de um modo mais pormenorizado o fenómeno sob investigação por meio de uma recolha de dados ricos em detalhes descritivos. Os estudos explanatórios procuram explicar e descobrir relações entre aspetos de um mesmo tópico em estudo.

O estudo que se apresenta nesta dissertação é descritivo. Procurou-se observar e compreender tão aprofundadamente quanto possível o modo como alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade realizam tarefas de formulação de problemas, o conhecimento matemático que manifestam e o modo como o mobilizam na resolução das tarefas, e ainda que sentidos ou expectativas têm relativamente a esta atividade. Foi a procura dos significados que as tarefas de formulação de problemas assumem para quem as resolve e a procura do modo como o conhecimento matemático é mobilizado na sua resolução que exigiu a utilização de uma metodologia qualitativa, assente na realização de entrevistas em profundidade e na observação participante. Bogdan e Biklen (1994) afirmam que estas duas estratégias de obtenção de dados são as que refletem melhor as características da metodologia qualitativa.

Tratando-se de uma investigação que visava um conhecimento aprofundado do modo como os alunos se envolvem na formulação de problemas, optou-se por fazer este estudo envolvendo quatro participantes. Este formato de desenvolvimento da investigação configura-se de algum modo com os estudos de casos.

Robert Stake (2005) distingue essencialmente dois tipos de estudo de caso em função do interesse que eles possam assumir para o que se está a investigar. O interesse por um caso pode ser intrínseco ou instrumental e, dentro deste último, pode haver necessidade de envolver mais do que um caso, designando-o então por estudo de caso múltiplo ou coletivo.

Um caso intrínseco é aquele cujo objeto de estudo tem interesse por si mesmo, tanto por aquilo que tem de particular como pelas suas características mais comuns. Em princípio, o caso não é escolhido por representar outros casos, nem por representar uma particularidade ou problema exterior ao próprio caso. Ou seja, o princípio e o fim do estudo é o conhecimento *daquele* caso.

O estudo de um caso é instrumental se o objetivo principal for obter informação sobre um determinado problema, um fenómeno, ou até testar uma teoria. Ele pode ser escolhido por partilhar características comuns a outros casos, isto é, pela sua tipicidade, ou então, pelo contrário, funcionando como um contraexemplo. Ou seja, o caso é secundário; ainda que seja estudado em profundidade e detalhadamente exposto, ele funciona como um facilitador para compreender outro objeto de estudo que lhe é exterior. Neste sentido pode ser interessante ou mesmo necessário envolver vários casos para que, estudados em conjunto, permitam alcançar uma melhor compreensão do objeto sob investigação. São estes os estudos de casos múltiplos de acordo com Stake (2005). Estes casos podem ser escolhidos por partilharem características comuns, mas também por serem de algum modo diferentes. O critério de seleção tem a ver com o objeto em estudo, sempre no intuito de que esse conjunto de casos conduzam a uma melhor compreensão, ou até mesmo a uma teorização passível de ser alargada a um maior número de casos.

Robert Stake (2005) reconhece que classificações de outros autores não encaixam bem com esta que propõe. O mérito desta classificação é basear-se num critério funcional, ou seja, que responde à pergunta sobre a finalidade essencial do estudo de caso.

O estudo que se apresenta nesta dissertação serve-se de quatro casos para mostrar os processos de formulação de problemas, a forma como alunos de 3.º e 4.º ano mobilizam o conhecimento matemático associado à multiplicação e divisão na realização deste tipo de atividade. Trata-se portanto, de acordo com Stake (2005), de um estudo instrumental de casos múltiplos.

Os casos foram selecionados por meio de critérios[12] que podem sustentar alguma representatividade dos alunos daquele nível de escolaridade quanto ao seu desempenho geral nas tarefas escolares relativas à matemática, e o objetivo não é comparar os resultados obtidos em cada caso, mas reunir os dados obtidos em todos eles para compreender o objeto em estudo, observando as diferenças e as semelhanças.

O estudo desenvolveu-se através da resolução de tarefas de formulação de problemas, de um determinado tipo definido na literatura (ver na pág. 10), realizadas em entrevistas em profundidade feitas individualmente a cada participante. São cinco entrevistas (uma delas dividida em três partes) a quatro participantes, Quatro das entrevistas partem da resolução de uma tarefa.

A resolução de cada tarefa de formulação de problemas é o eixo em torno do qual gravitam todos os dados recolhidos, a sua interpretação e a exposição nesta dissertação.

[12] Género e desempenhos escolares diferentes.

Das quatro entrevistas em profundidade com tarefas definidas à partida, em duas delas era preciso inventar um contexto e uma questão para uma expressão de cálculo fornecida como estímulo; nas outras duas tarefas foi fornecido um contexto próximo da realidade, descrito em palavras, sendo necessário ao aluno formular perguntas que relacionassem os dados fornecidos, constituindo assim um problema que seria também resolvido pelo autor.

Foram também obtidos dados por meio de observação participante das aulas para, essencialmente, conhecer os conceitos processos desenvolvidos em aula no que respeita à multiplicação e divisão, o modo de participação dos alunos e o tipo de atividade realizadas. Estes dados permitiram enquadrar os processos manifestados pelos participantes nas entrevistas em torno da resolução das tarefas. Por exemplo, verificou-se que a mobilização de determinados teoremas-em-ação referidos por Vergnaud (e.g. 1983, 1988) na resolução das tarefas feitas nas entrevistas estava em concordância com o que os alunos utilizavam em aula.

6.2. A seleção dos participantes

A seleção da escola e dos participantes na investigação foi feita em função da escolha de uma professora que lecionasse um 3.º ano de escolaridade, dado o objetivo do estudo, e que já tivesse alguma colaboração profissional com o investigador, facilitando assim a sua adesão ao desenrolar da investigação. Foi assim que o estudo se iniciou com alunos que frequentavam o referido ano, numa turma do ensino regular de uma escola de Lisboa. Quando o estudo se iniciou a turma era composta por 21 alunos, mas destes apenas 16 foram considerados elegíveis para participantes no estudo. A razão para esta restrição do grupo prende-se com o facto de terem feito parte da turma desde o primeiro ano e, por isso, serem aqueles sobre os quais a professora detinha melhor informação sobre o seu desempenho escolar. Os nomes destes alunos foram ficcionados para garantir o anonimato e serão designados sempre por esse nome.

Para participantes neste estudo interessava selecionar alunos com características diferentes para que os dados recolhidos e analisados pudessem mostrar um quadro representativo do fenómeno em estudo, isto é, o modo de formulação de problemas. Para este efeito, e tendo em atenção o objetivo e interesse deste estudo, os alunos deveriam apresentar diferentes níveis de desempenho ou diferentes características em termos de sucesso escolar, sobretudo na área da Matemática, para se conseguir ter uma visão diversa sobre a formulação de problemas e o conhecimento matemático mobilizado nessa atividade.

Os critérios previamente estabelecidos para orientarem a seleção dos participantes foram definidos de uma forma bastante ampla. Foi especialmente tido em conta o desempenho dentro do tema matemático Números e Operações, olhando para a performance no cálculo e na resolução de problemas, dado que sobre este tema incidiram as tarefas usadas para a recolha de dados. Foi também ponderado serem do sexo feminino e masculino.

As informações sobre o desempenho dos alunos foram recolhidas recorrendo a três fontes: os resultados do Teste Intermédio realizado no 2.º ano de escolaridade, a observação do trabalho desenvolvido em sala de aula e a professora. Os dados recolhidos pela observação e obtidos da professora foram registados no diário de campo.

O Teste Intermédio (TI) foi uma prova nacional da autoria do Ministério da Educação e Ciência (MEC) para os alunos que frequentam o 2.º ano de escolaridade. O TI que os alunos desta turma realizaram foi o do ano letivo 2012/13, elaborado pelo Gabinete de Avaliação Educativa (GAVE), entidade substituída pelo atualmente designado Instituto de Avaliação Educativa (IAVE). A prova ocorreu a 31 de maio de 2013 e pode ser consultada no *site* da instituição.

A informação prévia sobre a prova não descriminava explicitamente a classificação dos itens da prova quanto aos temas matemáticos (Números e Operações, Geometria e Medida, Organização e Tratamento de Dados) e quanto às capacidades transversais (Resolução de problemas, Raciocínio, Comunicação) que constam do programa curricular a que a prova se remete – Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007). Assim, para observação do desempenho dos alunos, foram de *motu-proprio* identificados os itens que incidiam no tema matemático Números e Operações, envolvendo cálculo, raciocínio e resolução de problemas. Estes itens envolvem: *i)* cálculos apresentados sem outro contexto senão o puramente matemático, *ii)* cálculos apresentados dentro de um contexto descrito verbalmente, nos quais o raciocínio e/ou o domínio de conceitos desempenha um papel crucial, e *iii)* problemas, i.e., itens que exigem o desenho de estratégias para sua resolução.

Embora não tenha sido possível observar o modo ou os processos usados pelos alunos na resolução dos itens da prova, foi possível saber a classificação em cada um dos itens através das categorias estabelecidas nos critérios de classificação da prova, permitindo assim obter uma lista ordenada do sucesso obtido na prova.

A prova apresentava 18 itens, mas com as subalíneas contavam-se 20 questões. Para obter uma lista ordenada do sucesso dos alunos, usou-se uma cotação assente em dois níveis, correto e incorreto. Estes dois níveis foram deduzidos dos critérios de classificação da prova como já se disse. Por exemplo, os critérios definidos para a correção do item 15., bastante semelhantes a outros itens que pediam a explicitação do processo, são:

> Código 5 - Apresenta uma explicação adequada e completa e responde corretamente, ou não escreve a resposta, mas esta está implícita na explicação.
>
> Código 4 - Apresenta uma explicação adequada e completa, mas não responde nem a resposta está implícita.

Código 3 - Apresenta uma explicação adequada e completa, mas dá uma resposta incorreta.

Código 2 - Responde corretamente, sem apresentar uma explicação adequada ou sem apresentar uma explicação.

Código 1 - Apresenta uma resposta diferente das anteriores.

Código 0 - Não apresenta qualquer resposta nem qualquer explicação.

Para a tradução destes diferentes critérios numa cotação de dois níveis, correto e incorreto, consideraram-se como respostas corretas apenas os descritores semelhantes aos apresentados nos códigos 5 e 4.

Os resultados obtidos pelos alunos no Teste Intermédio (TI) permitiram estabelecer uma primeira ordenação dos alunos em termos de desempenho e focar a observação em determinados alunos. A lista que se segue apresenta o nome dos alunos com o correspondente número de respostas consideradas corretas. Os nomes assinalados a negrito correspondem aos alunos selecionados inicialmente para participantes no estudo, tendo sido a Clarisse excluída posteriormente.

18 - Madalena

18 - Guilherme

15 - Rita

15 - Francisca

14 - Daniel

12 - Clarisse[13]

12 - Miguel

10 - Ricardo

10 - Carla

9 - Carina

9 - Ilda

8 - Nuno

7 - Isabel

7 - Sara

5 - Belinda

5 - Vânia

A Madalena com 18 respostas corretas, respondeu corretamente a 8 dos 9 itens identificados como os que incidem sobre o tema Números e Operações dizendo respeito a cálculo e resolução de problemas. O que não respondeu corretamente foi o item 5., o qual não foi resolvido corretamente

[13] Verificou-se após a análise dos dados que o caso da Clarisse não iriam acrescentar significativamente as conclusões pelo que não se incluiu nesta dissertação.

por qualquer dos alunos. Este item, de resposta por escolha múltipla, envolvia a resolução de um problema de cálculo que exigia o domínio do conceito de paridade e seu efeito na adição.

O Daniel com 14 respostas corretas, respondeu corretamente a 5 dos 9 itens identificados: três problemas e dois cálculos apresentados em contexto. Um dos problemas envolve a identificação de um termo de uma sequência de crescimento; outro, com uma estrutura multiplicativa, apresenta parte dos dados iconicamente; e o terceiro é um problema de dois passos com uma estrutura multiplicativa.

A Clarisse com 12 respostas corretas, respondeu corretamente a 3 dos 9 itens identificados: um problema e dois cálculos, um com e outro sem contexto. O problema resolvido corretamente tem uma estrutura multiplicativa, com parte dos dados apresentados iconicamente.

O Ricardo com 10 respostas corretas, respondeu corretamente a 4 dos 9 itens identificados: dois problemas e dois cálculos com contexto. Um dos problemas resolvido corretamente envolve a identificação de um termo de uma sequência de crescimento. O outro problema tem uma estrutura multiplicativa, com parte dos dados apresentados iconicamente.

A Isabel com 7 respostas corretas, responde corretamente apenas a 1 dos 9 itens identificados: um problema de dois passos de estrutura multiplicativa. Foi a única aluna com menos de 9 respostas corretas que resolveu este problema.

Todos os alunos selecionados respondem corretamente a, pelo menos, um item de estrutura multiplicativa.

Os dados recolhidos a partir dos resultados no TI serviram como uma primeira perspetiva, necessariamente limitada, sobre o conhecimento dos alunos. Permitiram observar que os alunos selecionados possuem, de facto, diferentes níveis de desempenho, mas não justificaram só por si a escolha destes em detrimento de outros. O conhecimento que a professora forneceu dos alunos e a observação feita pelo investigador na sala de aula acrescentaram a informação necessária sobre o desempenho dos alunos e esclareceram a seleção final dos alunos participantes.

É importante referir que as informações prestadas pela professora sobre o desempenho dos alunos contrariaram em certa medida a ordenação dos alunos feita pelo sucesso no Teste Intermédio. O Daniel, por exemplo, colocado numa posição próxima do Ricardo e da Clarisse, passa para o grupo dos alunos com melhor desempenho tanto em Matemática como nas restantes áreas. O bom desempenho do Daniel foi também observado pelo investigador em sala de aula.

Dos cinco alunos com melhor desempenho (Daniel, Francisca, Guilherme, Madalena e Rita) foram selecionados o Daniel e a Madalena. Pesou o facto de serem de sexo diferente, a facilidade com que se exprimiam, tornando-os bons informantes, e as suas características na utilização de processos de cálculo. O Daniel recorria frequentemente a estratégias particulares, muito próprias, enquanto a Madalena usava com maior frequência os procedimentos mais normalizados ou algorítmicos.

A seleção dos alunos com menor nível de desempenho foi mais difícil de fazer. A seleção destes alunos foi sobretudo discutida com a professora. À professora foi pedido que fizesse a ordenação dos alunos em duas vertentes: uma sobre o seu interesse e desempenho na resolução de problemas e outra sobre o seu interesse e desempenho em cálculo, procurando um compromisso entre o cálculo mental e o escrito. Estas duas listas permitiram ponderar a escolha dos alunos de acordo com o seu interesse e desempenho.

A Clarisse e o Ricardo eram alunos que se encontravam numa zona intermédia em termos de desempenho. A Clarisse era uma aluna que se envolvia na resolução de tarefas apoiando-se sobretudo em procedimentos normalizados pela prática mais comum em exercícios de treino em aula. O Ricardo, pelo contrário, era um aluno que fazia uso de procedimentos mais alternativos, sobretudo no cálculo, fator que pesou fortemente a seu favor apesar de manifestar dificuldades em termos de clareza no registo escrito das suas estratégias e procedimentos. A Isabel era uma aluna muito interessada mas que manifestava menor sucesso no seu desempenho tanto na resolução de problemas como no cálculo. Entre os alunos ou alunas com menor nível de desempenho era a que mostrava ser melhor informante. Os dados recolhidos da Clarisse acabaram por não ser integrados nesta investigação pois não acrescentavam resultados significativos aos recolhidos do Ricardo e da Isabel. Ficaram portanto definidos aqueles que constituíram os quatro casos: A Madalena, o Daniel, o Ricardo e a Isabel.

6.3. Os processos de recolha de dados

Tal como acima já foi explicitado, este trabalho procurou observar e compreender o modo como alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade realizam tarefas de formulação de problemas, que conhecimento matemático manifestam e como o mobilizam na sua resolução, que sentidos ou expectativas têm relativamente a estas tarefas. As entrevistas em profundidade constituíram-se, assim, como o principal instrumento de recolha de dados e é sobre essas que se concentra a investigação. Entretanto recorreu-se também à observação participante com o objetivo de encontrar informação que completasse ou validasse dados recolhidos nas entrevistas. Os resultados da observação participante tomaram a forma de um diário de campo. Neste diário estão informações prestadas pela professora, os dados da observação de algumas aulas e das produções dos alunos, notas sobre a realização de algumas das entrevistas aos participantes e reflexões do investigador. Parte das observações das aulas foram registadas em vídeo, especificamente uma rotina diária de cálculo mental instituída na turma designada "número do dia". Como já se referiu acima, os resultados do Teste Intermédio que a turma realizou no 3.º período do 2.º ano de escolaridade contribuíram apenas para o processo de seleção dos participantes.

A Tabela 4 mostra a cronologia do trabalho de campo. Este iniciou-se em outubro de 2013, no 1.º período do ano letivo em que os alunos frequentavam o 3.º ano de escolaridade

Tabela 4: Resumo cronológico do trabalho de campo realizado.

Ano letivo	Período	Trabalho realizado
2013/14 3.º ano	1.º	Observação de aulas
	2.º	Observação de aulas Seleção dos participantes Entrevista livre – 1.ª parte (março, 24)
	3.º	Observação de aulas Entrevista sobre a tarefa “30×25” (maio, 16)
2014/15 4.º ano	1.º	Observação de aulas Entrevista sobre a tarefa “Caixas de Pastéis” (outubro, 9) Entrevista livre – 2.ª e 3.ª partes (outubro, 16 e 23) Entrevista sobre a tarefa “3×6=18” (dezembro, 2)
	2.º	Entrevista sobre a tarefa “Caixas de Gelados” (janeiro, 6)

O trabalho de campo consistiu essencialmente na observação de aulas e nas entrevistas. As reuniões com a professora foram em geral informais. As mais formais foram duas, a que se fez antes de iniciar o trabalho de campo, e a destinada à seleção dos participantes que está assinalada no cronograma. Para designar as entrevistas tomou-se o título da tarefa que serviu de base. A entrevista que se designa por “Livre”, como se pode ver no cronograma, foi desenvolvida em três momentos diferentes. Essa entrevista não se baseou numa tarefa guiada por um enunciado, daí a designação “Livre”. As restantes entrevistas estão designadas pelo título dado à tarefa.

No 1.º período procedeu-se apenas à observação de aulas. A seleção dos participantes foi feita, em reunião com a professora, no início do 2.º período, mas a primeira entrevista com os alunos selecionados fez-se só no final desse período (Entrevista Livre – 1.ª parte), tendo sido entretanto realizadas mais algumas observações de aulas. No 3.º período realizaram-se mais observações de aulas e foi então feita a primeira entrevista baseada numa tarefa de formulação de problemas (“30×25”). Já no 4.º ano, no 1.º período, fizeram-se mais observações de aulas e outras duas entrevistas baseadas em tarefas (“Caixas de pastéis” e “3×6=18”). Não houve tempo para realizar a última entrevista (“Caixas de gelados”) antes da interrupção letiva do Natal, tendo então sido feita logo no 2.º dia de aulas do 2.º período.

6.3.1. A observação participante

Bogdan e Biklen (1994) consideram a observação participante como uma estratégia de trabalho de campo característica da metodologia de investigação qualitativa pois "o investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las, dar-se a conhecer e ganhar a sua confiança, elaborando um registo escrito e sistemático de tudo aquilo que ouve e observa" (pág. 16). Foi assim que se introduziu o investigador, o autor desta dissertação, na sala de aula. Os alunos sabiam que estavam a ser observados, quer dizer que reconheciam a presença do investigador embora na qualidade de um outro professor, colega da professora da turma, interessando em estudar e compreender o que eles faziam e como o faziam. Este modo como o investigador foi apresentado aos alunos proporcionou um ambiente de confiança e de à vontade nas relações que se estabeleceram.

No trabalho de campo, o observador pode ter um papel mais ativo ou menos ativo. Bogdan e Biklen (1994) referem um *continuum* entre um observador que se mantém de fora de toda a atividade que observa e aquele que se integra totalmente no mundo observado, nele participando com o mesmo estatuto dos sujeitos. Situam o observador participante algures entre estes dois extremos. Também Evertson e Green (1986) afirmam que na observação participante o investigador pode ter um papel mais passivo ou mais ativo, correspondendo o primeiro a um observador que raramente participa nos acontecimentos e o segundo ao que participa.

No estudo que se apresenta nesta dissertação, o papel do investigador na observação das aulas esteve entre estes dois extremos, embora mais próximo do observador passivo. Enquanto decorria a aula observada o investigador não interferia nas atividades a não ser pontualmente para pedir algum esclarecimento sobre algo que tivesse sido dito ou discutido e não tivesse ficado claro. Naturalmente, esta intervenção do investigador era feita dentro do respeito pelas normas que regiam a participação dos alunos, isto é, aguardando que lhe fosse dada a palavra. Por outro lado houve também alguma negociação com a professora para a realização de algumas das atividades, sobretudo no que se refere à sua calendarização.

A observação das aulas tinha por objetivo obter a informação necessária para compreender ou enquadrar os dados obtidos nas entrevistas. Foram observados momentos de discussão de resoluções de problemas, rotinas de treino de cálculo associadas à resolução de problemas simples, produções dos alunos que decorriam do trabalho realizado nas aulas e, pontualmente, outras produções realizadas em momentos não observados e que foram facultadas pela professora por sua iniciativa, a propósito de algum aspeto conversado respeitante aos desempenhos dos alunos. A observação destas produções foi tomada do mesmo modo e no mesmo registo que a observação das aulas, ou seja, no diário de campo.

O registo da observação no diário de campo foi feito dentro de um sistema narrativo (Evertson & Green, 1986). Isto significa que a observação foi registada em linguagem corrente pelo investigador, sem recorrer a categorias de observação previamente definidas. De acordo com Evertson e Green, neste sistema o "observador é o instrumento de observação primário" isto é, "o que é registado depende largamente do sistema percetual e habilidade do observador para capturar, em linguagem quotidiana, o que é observado" (pág. 177).

Embora as categorias de observação não tenham sido definidas previamente, a observação não deixou de ser guiada pelo interesse ou objetivo que a determinou. Nessa medida, o olhar do investigador estava orientado pelas questões deste estudo procurando observar o conhecimento matemático veiculado nas aulas, sobretudo no que se refere aos conceitos e processos relacionados com a multiplicação e divisão.

Para o registo das observações o investigador recorreu a anotações feitas durante o período de observação, completadas posteriormente pela redação de um texto mais detalhado e de carácter reflexivo, o diário de campo. Depois das primeiras visitas à sala e respetivas observações deu-se conta que era difícil fazer anotações completas da observação da rotina diária de cálculo mental (número do dia) que se fazia no início das aulas. Os diálogos que se estabeleciam entre alunos e entre estes e a professora ocorriam a uma velocidade difícil de acompanhar. Foi então decidido proceder também a um registo vídeo para a observação desta rotina que era feita no início das aulas e que demorava menos de 15 min. O registo vídeo tinha exclusivamente o objetivo de permitir identificar *quem disse o quê* em ocasiões em que tal não foi reconhecido na observação em tempo real.

Dentro do que se considera a observação participante, a professora foi uma importante fonte de informação para a compreensão da análise de aspetos que decorreram das entrevistas com os alunos participantes. As informações prestadas pela professora (Luísa, nome fictício) foram sobretudo recolhidas informalmente na sequência das visitas à sala para a observação das aulas. As conversas eram realizadas ou antes do início das aulas ou nos intervalos. No decorrer das aulas, em momentos em que se encontrava mais disponível, a Luísa também se aproximava para mostrar produções dos alunos ou chamar a atenção para um ou outro aspeto do trabalho que se realizava. Para além destes momentos informais de partilha de informações com a Luísa, foram inicialmente feitas duas reuniões: a primeira, antes de iniciar o trabalho de campo, com a intenção de aferir o trabalho que iria ser desenvolvido; a segunda para, essencialmente, tomar a decisão final sobre a seleção dos participantes. Esta decisão só foi tomada no início do segundo período depois das primeiras visitas à sala de aula para observação da atividade dos alunos em aula. Os dados resultantes destas conversas e reuniões foram registados no diário de campo.

As informações partilhadas entre a Luísa e o investigador incidiam sobretudo no trabalho desenvolvido com os alunos, nas competências e conhecimentos que manifestavam ou não, nas histórias ou episódios pessoais que revelavam aspetos da personalidade de cada um, nas condições sociais em que viviam e que eram relevantes para o desempenho nas aulas, em especial na disciplina de Matemática. Muitas das conversas incidiam também na sua vida enquanto professora, as perspetivas sobre a escola e o currículo, comentários críticos sobre as práticas de sala de aula e as tarefas que usava ou não, sobre os manuais escolares,… assuntos estes que, não sendo cruciais ou necessários para a investigação, facilitaram o estabelecimento de uma relação de cumplicidade que permitia uma conversação livre e a partilha de informação, de pontos de vista, de organização do trabalho e do modo como este decorria. Tanto a Luísa partilhava aspetos do seu trabalho em sala de aula, como o investigador o fazia relativamente ao desenvolvimento da investigação em curso, particularmente a aspetos significativos das entrevistas com os participantes, possibilitando muitas vezes aferir ou refletir sobre aspetos particulares do conhecimento, dos processos ou das opiniões manifestadas pelos alunos nas entrevistas.

6.3.2. O diário de campo

Foi designado por diário de campo o que autores como Bogdan e Biklen (1994) ou Hesse-Biber e Leavy (2011) chamam notas de campo. Para Bogdan e Biklen (1994) as notas de campo são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo" (pág. 150). Estes autores, consideram nas notas de campo dois tipos de registos: o descritivo e o reflexivo. O registo descritivo procura captar detalhadamente e o mais objetivamente possível o que é observado. O registo reflexivo apresenta o ponto de vista do observador, os seus comentários pessoais, as preocupações e reflexões sobre o que observa e sobre o seu próprio trabalho de investigação. Chamam também a atenção para a dificuldade em separar estes dois tipos de registo, referindo que há investigadores que os separam declaradamente atribuindo ao segundo a designação de diário de campo. Hesse-Biber e Leavy (2011) para além das notas tomadas em tempo real e as que são feitas posteriormente de memória acrescentam as "notas de interpretação e análise" (pág. 216) que ligam as duas anteriores e respondem a questões como "O que significam estas notas para si? Que coisas relacionam? Que novas perguntas levantam? O que é que aprendeu até agora e o que isso significa?" (pág. 216). Afirmam também que estas notas podem conter pensamentos íntimos e constituir uma abertura para um *brainstorming*. Como se pode ver estas características são próprias de um texto reflexivo e muito personalizado. No estudo reportado nesta dissertação optou-se por fazer um diário de campo onde o discurso descritivo e reflexivo ocorrem simultaneamente sem rejeitar sentimentos pessoais do investigador. A consideração da diferença entre o discurso descritivo e o reflexivo foi feita no processo de análise.

Tal como cima já foi dito, o investigador tomou notas durante a observação das aulas e só posteriormente procedeu ao registo no diário de campo, acrescentando às notas tomadas durante a observação o que de memória recordava e as ideias, preocupações e reflexões que suscitavam. Mas o diário de campo não resultou apenas das observações das aulas. Foram também incluídas descrições e reflexões sobre algumas entrevistas aos participantes, sobre conversas tidas com a professora, informais ou das duas reuniões mais formais, sobre preocupações relativas ao próprio trabalho da investigação em curso. É também por isso que ele ganha o estatuto de um diário e não apenas de notas tomadas da observação.

6.3.3. As entrevistas

A par da observação participante, a entrevista em profundidade é uma técnica de recolha de dados característica da investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994; Hesse-Biber & Leavy, 2011).

Falando da entrevista em geral, Moreira (2007) assegura que é a técnica mais utilizada na investigação social. É comum a distinção entre a entrevista qualitativa e a entrevista quantitativa, sendo esta um tipo de entrevista que implica um conjunto de questões fechadas, bem definidas, que conduzem a um número finito de respostas possíveis. Já a entrevista qualitativa é definida como

> "uma conversa a) provocada explicitamente pelo entrevistador; b) dirigida a pessoas selecionadas com base num plano de investigação, isto é, com base em determinadas características (pertença a certa categoria social, a um dado grupo, com certas experiências, etc.); c) assente num esquema flexível de interrogação" (Moreira 2007, p. 204).

Diferentes autores caracterizam a entrevista de formas diferentes quanto ao seu nível de estruturação. Vilelas (2009) distingue, em primeira instância, entrevistas estruturadas de não-estruturadas. Dentro desta última apresenta três tipos: informal, focalizada e guiadas por pautas. Moreira (2007) apresenta quatro géneros: informal, baseada num guião, semiestruturada e estruturada, e considera que apenas as três primeiras se enquadram dentro da entrevista qualitativa. Faz corresponder à entrevista em profundidade a informal.

A diversidade na caracterização dos diferentes tipos de entrevistas tem a ver com o grau de estruturação que as enformam. Na classificação das entrevistas quanto à sua estrutura, Amado e Ferreira, (2014) começam por recorrer à imagem de uma linha contínua desde as entrevistas rigidamente estruturadas até às que não dispõem de qualquer estrutura e são, por conseguinte, totalmente flexíveis. Caracterizam depois quatro tipos: estruturada ou diretiva, semiestruturada ou semidiretiva, não estruturada ou não diretiva e a entrevista informal. Como se verá a seguir, a mesma designação pode ser usada com significados diferentes.

A entrevista estruturada ou diretiva implica a constituição de um conjunto de perguntas previamente fixadas e focadas num tema restrito já conhecido do investigador, e cujas respostas se cingem a um grupo delimitado de categorias pré-estabelecidas. Supõem um entrevistador tanto quanto possível neutral ou impessoal. Esta caracterização das entrevistas estruturadas é partilhada tanto por Moreira (2007) como por Vilelas (2009) e por Amado e Ferreira (2014). Este tipo de entrevista está associado à entrevista frequentemente usada para obter dados tratados quantitativamente, mas não exclusivamente.

A entrevista semiestruturada ou semidiretiva, de acordo com Amado e Ferreira (2014), é também composta por perguntas organizadas (ordenadas) previamente mas, na condução da entrevista, é dada ao entrevistado grande liberdade na resposta. Moreira (2007) partilha deste ponto de vista, mas acrescenta que, na implementação deste instrumento, as perguntas devem ser colocadas do mesmo modo a diferentes indivíduos para que sejam comparáveis os resultados obtidos. Vilelas (2009) não define entrevista semiestruturada. A existência de uma lista pré-definida de perguntas remete para a classe das entrevistas estruturadas.

Na entrevista não estruturada ou não-diretiva, de acordo com Amado e Ferreira (2014), as perguntas surgem da interação entre entrevistado e entrevistador não estando, portanto, previamente definidas. Supõem um entrevistador que acompanha a exposição do entrevistado mas que é suficientemente experiente e sensível para que, na condução da entrevista, possa alcançar os objetivos a que se propõe. Nesta classe de entrevistas (não estruturadas) surgem as diferenças nas considerações feitas por autores diferentes. Moreira (2007) considera dois tipos: a informal e a baseada num guião. Vilelas (2009) inclui três tipos: a informal, a focalizada e a guiada por pautas. Amado e Ferreira retiram daqui a entrevista informal, definindo-a à parte das não estruturadas.

Entrevistas guiadas por pautas ou baseadas num guião são caracterizadas da mesma forma tanto por Moreira como por Vilelas. Ambos apontam para a existência de uma lista de pontos de interesse pensados previamente (mas não de perguntas bem definidas) que o entrevistador explora e gere livremente durante a entrevista, preocupando-se apenas que o entrevistado não divague para além dos pontos de interesse definidos. Verifica-se aqui algum grau de estruturação que não é especificamente sublinhado por Amado e Ferreira na classe das entrevistas não estruturadas. Tanto Moreira como Vilelas falam de entrevistas focalizadas. Para Moreira ela é uma variante da entrevista baseada num guião. Para Vilelas ela goza das características das informais mas que se foca num único tema, tendo um grau de estruturação inferior ao das entrevistas guiadas por pautas.

As entrevistas informais, reconhecidas por Amado e Ferreira como relevantes na investigação etnográfica, são caracterizadas por estes autores como as que não dependem de um plano prévio de questões e que são "verdadeiras 'conversas' ou 'troca de ideias' acerca do vivido" (pág. 210). Amaro e Ferreira exemplificam com as conversas que tinham com os intervenientes após aulas observadas. Vilelas (2009) considera-a também a menos estruturada das entrevistas, não sendo necessário qualquer esquema prévio, e reconhece a sua utilidade nos estudos exploratórios e descritivos. Moreira (2007) chama-lhe também entrevista em profundidade, designação que entra, pelo menos aparentemente, em conflito com a caracterização feita por Amado e Ferreira das entrevistas informais. De facto, Moreira, embora reconhecendo que as perguntas surgem no contexto e da interação entre entrevistador e entrevistado, que as entrevistas são únicas pois podem diferir em função do entrevistado, dá ainda a entender que se trata de um entrevista longa, que “pode demorar horas, desdobrar-se em sessões e ganhar características de um autêntico relato biográfico” (pág. 204). Estas características não diferem essencialmente das enunciadas por Amado e Ferreira (2014) para as entrevistas não estruturadas o que levanta a questão da razão por que estes autores distinguem a categoria das informais das não estruturadas. Esta razão pode ter a ver com o carácter de “conversação” da entrevista informal.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994) entrevista em profundidade pode assumir a designação de entrevista não estruturada, não-diretiva, aberta ou de estrutura flexível (pág. 16-17). Hesse-Biber e Leavy (2011) afirmam sobre a entrevista em profundidade que ela pode ser usada em estudos exploratórios ou descritivos. Vilelas (2009) diz o mesmo quando fala da entrevista informal. De acordo com Hesse-Biber e Leavy (2011), a entrevista em profundidade é um processo semelhante a uma conversa e que é usada quando se pretende recolher informação sobre um tema específico. É muitas vezes usada na procura de padrões que surgem do discurso dos entrevistados.

As entrevistas feitas aos participantes no estudo relatado nesta dissertação assumem as características das entrevistas em profundidade. Contudo, há particularidades que as distinguem em virtude da idade dos entrevistados. Um entrevistado com maior maturidade consegue tomar a palavra durante mais tempo e lidar com perguntas mais abertas pela maior capacidade de elaboração do discurso longo. Os entrevistados neste estudo eram pessoas com 8 ou 9 anos de idade, devendo reconhecer-se que a capacidade de elaboração do discurso é menor que a de um adulto e que podem ter menos facilidade em expressar as suas ideias, pelo que a intervenção do entrevistador pode ser mais frequente, e as perguntas, ainda que possuam um carater aberto, precisam de ser formuladas e reformuladas com frequência.

O objetivo das entrevistas realizadas neste estudo era aprofundar a compreensão da relação entre o formulador de problemas e os problemas formulados. Para cumprir este objetivo foi necessário realizar várias entrevistas, ou melhor, foi necessário repartir em vários momentos o que poderia ser uma longa entrevista. Esta divisão foi feita pensando em objetivos mais específicos, nomeadamente:

- observar a resolução das tarefas de formulação de problemas e, portanto, obter informação quanto ao modo de formulação e de mobilização do conhecimento matemático;
- conhecer o formulador dos problemas, quem era, o que pensava sobre si, as suas preferências relativas a matérias escolares, as suas opiniões sobre a resolução e formulação de problemas, etc.

Relativamente ao primeiro objetivo foram feitas quatro entrevistas uma para cada tarefa; quanto ao segundo objetivo pode-se dizer que foi uma entrevista, subdivididas em três partes, mais por uma questão de duração, embora se possa distinguir três ideias, uma para cada uma das três partes: o aluno, a resolução de problemas e a formulação de problemas.

6.3.3.1. As entrevistas com tarefas de formulação de problemas

Nas entrevistas que decorriam da realização das tarefas havia, naturalmente, maior frequência na alternância entre a intervenção do entrevistado e do entrevistador, sendo necessário, muitas vezes, reformular a pergunta já feita em função da maior ou menor capacidade do entrevistado entender o que lhe foi perguntado, ou de responder cabalmente à questão. Assim, as entrevistas realizadas assumiram um caráter mais próximo de um diálogo onde pergunta e resposta se sucedem com frequência. A própria tarefa começava com uma pergunta que se pode dizer fechada, exatamente a que pede a resolução da tarefa. As perguntas que se lhe seguiam dependiam, essas sim, da reação do entrevistado. Numa tarefa em que era pedido a formulação de perguntas para transformar um determinado contexto num problema, alguns alunos começavam logo a escrever e outros por fazer comentários ou colocar dúvidas ao investigador. Isso condicionava o seguimento da entrevista e, naturalmente, dava-lhe um caráter particular, irrepetível de uma entrevista aberta. Numa visão global das várias entrevistas dá-se conta da influência de outras características particulares: o modo como os alunos reagiam às questões colocadas, as características de personalidade e a relação afetiva que estabeleciam com o investigador.

As entrevistas em profundidade aos alunos foram cruciais para o desenvolvimento da investigação pois foi através delas que se aprofundou a compreensão da relação entre o conhecimento matemático mobilizado pelos alunos e o modo de formulação de problemas, assim como os significados, expectativas e gostos pessoais que os alunos manifestavam.

Nas quatro entrevistas que partiam da resolução de uma tarefa de formulação de problemas, as perguntas não estavam todas definidas e algumas dependiam do tipo de tarefa e, como já se disse, da reação do aluno à tarefa. No entanto, todas as perguntas estavam orientadas para a resposta às questões do estudo e baseavam-se em três tipos:

- Porque tinham formulado *aquela* pergunta ou inventado *aquele* contexto;
- Como tinham pensado para formularem as perguntas ou imaginado o contexto;
- Qual a dificuldade ou facilidade na formulação ou resolução.

Estes três tipos de questões eram os que estavam definidos à partida. O modo como as questões foram enunciadas dependeu das circunstâncias. Por exemplo, olhando *a posteriori* para as entrevistas realizadas a partir de tarefas, eis o tipo de enunciado das perguntas que foram feitas:

- Como é que (em que é que) tu pensaste para fazer estas perguntas?
- Porque é que escolheste esse número para a tua pergunta?

- Dessas [perguntas] todas [que fizeste] qual é que foi para ti a mais fácil de fazer?
- E porque é que tu achas que essa é muito mais fácil?
- E qual foi a dificuldade que tu tiveste aí [na formulação da pergunta ou na sua resolução]?
- Inventar as perguntas ou os problemas é mais fácil ou mais difícil do que resolver os problemas já inventados?
- Lembras-te das outras atividades [tarefas de formulação feitas anteriormente] que fizemos? De quais gostaste mais? Porquê?

Como se deu a entender, estas perguntas não surgiram redigidas de um guião rigorosamente pré-estabelecido. Também não foram colocadas numa sequência previamente pensada, mas surgiram em função do contexto e desenrolar da entrevista. Por exemplo, a última pergunta da lista acima apresentada não surgiu, evidentemente, nas primeiras entrevistas.

Outra característica destas entrevistas dizia respeito à existência de duas vertentes, uma era a formulação das perguntas ou dos enunciados dos problemas e outra era a sua resolução. No entanto, nem sempre estas duas vertentes foram claramente e temporalmente separadas, embora, logicamente, uma pressuponha a realização prévia da outra. O modo como se passava da formulação para a resolução dependia das reações do aluno entrevistado e das necessidades no contexto da entrevista.

O pedido de resolução das perguntas ou problemas que os alunos inventavam era essencial, pois tornavam mais evidentes os conceitos, processos ou procedimentos subjacentes ou implícitos na formulação. Tal como neste estudo, já num outro realizado anteriormente (Almeida, 2011) pôde observar-se que muitas perguntas surgem do conhecimento que o aluno dispõe (ou pensa possuir) sobre uma possível resolução, mas nem sempre esse conhecimento ou forma de resolução possível é a que serve ao problema formulado. Ou seja, se não fosse pedido ao aluno para resolver o problema que formulou, o investigador poderia concluir erradamente sobre o conhecimento mobilizado para a formulação.

Esta vertente da resolução dos problemas formulados na condução das entrevistas levantou uma questão ética que se prende com a opção de conduzir ou não o aluno à resolução correta após se verificar uma incorreção. Esta questão foi ponderada tendo em conta a possibilidade de tal condução do aluno subtrair ou não dados à investigação. Considerou-se que, embora tal pudesse eventualmente acontecer, o erro não deixaria de se manifestar e, desde que a resolução correta não fosse revelada sem mais, mas fosse feita de modo a conduzir o aluno por meio de questionamentos, outros dados interessantes e relevantes poderiam tornar-se manifestos, algo que não aconteceria se assim não se procedesse. Foi também tido em conta que os alunos entrevistados estavam envolvidos num contexto de aprendizagem e não seria moralmente aceitável não os levar à correção dos processos.

6.3.3.2. As entrevistas que não partiam de tarefas

As entrevistas que não partiam da resolução de uma tarefa de formulação de problemas destinavam-se, como já acima se disse, a conhecer o formulador dos problemas, o que ele pensava sobre si e os seus colegas, as suas preferências relativas a matérias escolares, as suas opiniões sobre a resolução e formulação de problemas,… Diz-se “as entrevistas” no plural porque se realizaram em três momentos diferentes, não por haver uma caraterística claramente distintiva de cada uma, apenas por questões de tempo e de interesse do investigador em recolher alguns dados não previstos logo à partida. Decidiu-se então considerá-la uma entrevista subdividida em três partes e tomou a designação de entrevista “Livre” exatamente por não estar associada a uma tarefa em particular.

Tabela 5: Tópicos e subtópicos que constituem a informação recolhida na entrevista Livre.

Tópico	Subtópico	Entrevista Livre
Dados biográficos:	Com quem vivia (pais, irmãos e irmãs,…)	1.ª parte
	Onde e com quem fazia os trabalhos escolares que levava para fazer em casa (TPC). De que que maneira lhe prestavam ajuda na realização desses trabalhos.	
Gosto, interesses ou preferências	Pelas matérias escolares em geral	
	Pela matemática em geral (dele e das pessoas com quem vivia ou fazia os TPC)	
	Pelos temas matemáticos definidos no currículo (Números e operações, Geometria e medida, Organização e tratamento de dados	
	Pelo cálculo, raciocínio, resolução de problemas e formulação de problemas (pedindo justificação)	1.ª e 2.ª parte
Opinião sobre	O seu nível de sucesso em matemática	1.ª parte
	O nível de sucesso dos seus colegas, concretamente dos participantes no estudo	1.ª parte
	A resolução e a formulação de problemas – importância ou significado para o desenvolvimento de competências.	2.ª e / ou 3.ª parte
Resolução de problemas: memória de problemas resolvidos no passado (e o porquê dessa memória)		2.ª parte
Formulação de um problema seu preferido e justificação da preferência		3.ª parte

A Tabela 5 apresenta os tópicos e os subtópicos que referem mais especificamente o tipo de informação que obteve e em que parte da entrevista foi recolhida. Esta lista apresenta-se aqui organizada, mas em boa parte ela foi feita *a posteriori*. Trata-se de uma arrumação do género de informações recolhidas dos participantes. Naturalmente, compreende-se que as perguntas, ou melhor, o enunciado das perguntas não foi sempre igual e a ordenação dependia das circunstâncias no decorrer da entrevista.

A primeira parte da entrevista "Livre" foi pensada para conhecer os alunos. Uma boa parte das questões pensadas para a segunda e a terceira parte desta entrevista resultaram da necessidade que se sentiu de recolher mais dados em função de outros já recolhidos, por vezes retomando assuntos de entrevistas anteriores.

A duração das entrevistas variou em função do aluno entrevistado e a natureza da tarefa realizada. Em geral, as entrevistas à Madalena e ao Daniel, que se expressavam com mais fluência, eram mais curtas do que as realizadas à Isabel e ao Ricardo. Nenhuma entrevista ultrapassou os 60 minutos.

6.4. A análise dos dados

A escolha de um processo ou uma técnica de análise dos dados qualitativos obtidos numa investigação tem necessariamente em conta o enquadramento paradigmático do estudo, os seus objetivos e questões. Seguindo, este estudo, uma metodologia qualitativa de acordo com uma abordagem interpretativa, sem que tenham sido definidas *a priori* hipóteses explicativas do que se procurou observar e compreender, a análise dos dados recolhidos nas entrevistas e no diário de campo foi feita por meio de um processo de análise de conteúdo semelhante aos expostos por Guerra (2006) ou Hesse-Biber & Leavy (2011).

A definição do que é a análise de conteúdo sofreu evolução ao longo do tempo e assume características diferentes dependendo dos autores que a referem. Também os propósitos para que é utilizada e os processos que mobiliza são muito diversos e nem sempre foram entendidos da mesma maneira. Uma definição abrangente que se pode encontrar em Amado, Costa e Crusoé (2014) diz:

> A análise de conteúdo *stricto sensu* define-se como uma técnica que possibilita o exame metódico, sistemático, objetivo e, em determinadas condições, quantitativo, do conteúdo de certos textos, com vista a classificar e a interpretar os seus elementos constitutivos e que não são totalmente acessíveis à leitura imediata. (pág. 304)

Laurence Bardin (1977) afirma que se trata de um instrumento "marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações" (pág. 31) e reconhece a necessária diversidade dos procedimentos de análise dependendo do tipo de documentação em análise e dos objetivos dos investigadores. No que toca a esta grande diversidade, Hesse-Biber e Leavy (2011) vão mais longe ao afirmar que “There is no right way to go about analysis” (pág. 302), certamente no sentido de que não há uma receita única para se proceder à análise dos dados qualitativos.

Hesse-Biber e Leavy (2011) descrevem quatro fases no processo de análise de dados: a preparação dos dados, a exploração e redução dos dados e, finalmente, a interpretação. Estas quatro fases não são estanques, não se sucedem linearmente umas às outras, antes se interpenetram e fazem parte de um processo cíclico que vai desde a recolha de dados até à comunicação dos resultados da pesquisa.

A fase de preparação dos dados inclui a seleção do material que vai ser analisado e as questões que se prendem com a transcrição das entrevistas, trabalho este que, de um ponto de vista da investigação de carácter mais interpretativo, não é uma ação passiva, sobretudo quando é o investigador que faz a transcrição, sendo “um processo interativo [que] envolve o investigador numa escuta, análise e interpretação atenta” (pág. 304). Relativamente à transcrição das entrevistas registadas em vídeo/áudio, Guerra (2006) propõe três passos: primeiro, transcrever o que se entende deixando espaços em branco para o que não se ouve; segundo, rever a gravação e preencher as lacunas; terceiro, redigir um discurso inteligível com pontuação e supressão de elementos inúteis.

As fases de exploração e redução dos dados caminham lado a lado. Trata-se de uma fase de leituras reiteradas dos textos, assinalando partes importantes, resumindo-as e escrevendo memorandos com ideias que vão surgindo e que se confrontam com a literatura e outros dados. Trata-se de ganhar familiaridade com os dados e passar à codificação dos mesmos. A codificação consiste na segmentação do texto em partes significativas para as questões do estudo e na sua ‘etiquetagem’ de modo que se possam identificar temas, padrões, ideias e conceitos chave. A escrita de memorandos contribui para o processo de etiquetagem, para a integração de ideias e de relações dentro dos dados e para a constituição de categorias que agrupam ou separam os segmentos de texto de acordo com a codificação elaborada. Há, portanto, um processo cíclico de codificação e escrita de memorandos que possibilita um progresso na codificação, começando por códigos mais descritivos (próximos do texto) para chegar a códigos mais analíticos (interpretativos), constituindo categorias de conceitos-chave da análise.

A fase da interpretação dos dados não pode ser desligada das fases anteriores. O processo de interpretação pode começar desde cedo. A escrita de memorandos (que pode começar desde a recolha de dados) é um elo entre a análise e a interpretação, uma vez que permite ao investigador pensar sobre os dados que vai recolhendo, avaliando a pertinência e plausibilidade das ideias que lhe vão surgindo. O que Hesse-Biber e Leavy discutem nesta fase são questões que se prendem com a legitimidade da interpretação.

A Figura 11 mostra uma adaptação do modelo[14] visual do processo de análise de dados apresentado por Hesse-Biber e Leavy (2011, p. 317).

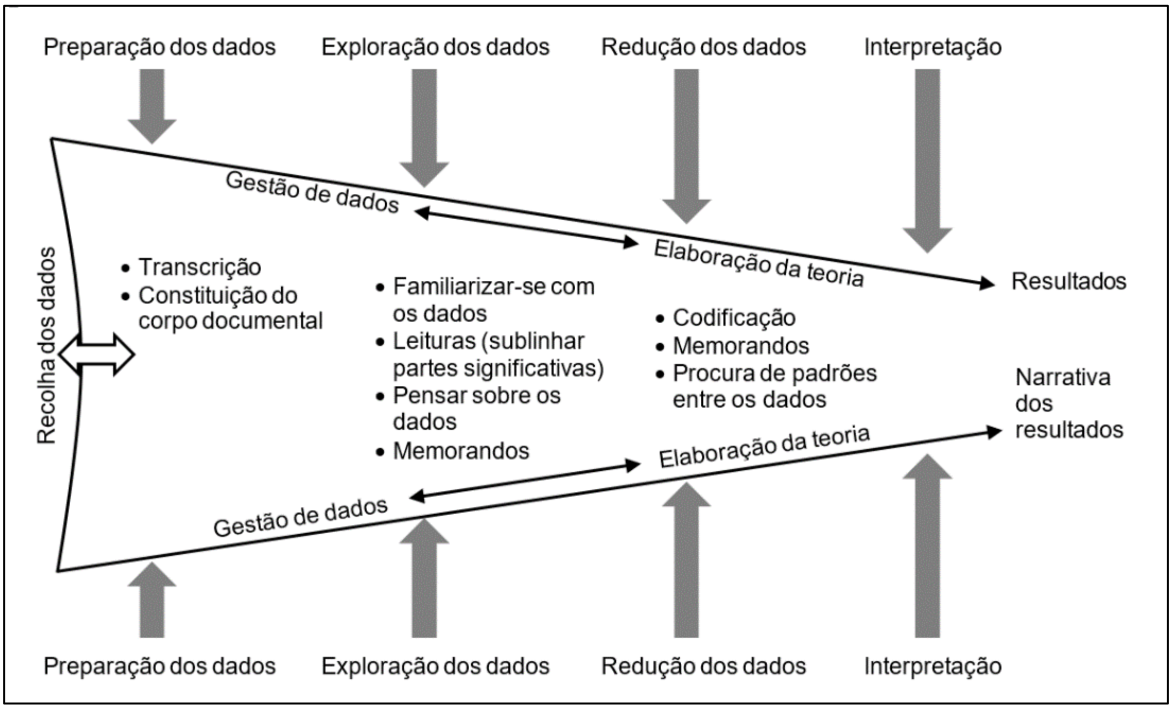


Figura 11:Modelo visual das fases da análise de dados (adapt. de Hesse-Biber & Leavy, 2011, p. 317).

Guerra (2006) apresenta um processo de análise de conteúdo de entrevistas bastante semelhante em alguns aspetos. Distingue cinco passos: a transcrição, a leitura, a construção de sinopses, a análise descritiva e a análise interpretativa. Pode-se facilmente relacionar a leitura, a escrita das sinopses e a análise descritiva com as fases de exploração e redução de dados do modelo de Hesse-Biber e Leavy, na medida em que, para além da leitura e o sublinhar das partes significativas dos textos, a escrita de memorandos e codificação se relacionam com a escrita das sinopses e a análise descritiva e interpretativa. Guerra (2006) é simplesmente mais específica no que diz respeito à codificação i.e., à análise descritiva e à interpretativa. Pese o facto dos conceitos de memorando e sinopse serem bastante diferentes, na verdade eles cumprem praticamente o mesmo papel, o papel de indutor, de provocador ou promotor da codificação ou classificação dos dados, da sua redução e interpretação.

Na análise descritiva, que procura organizar e condensar o que é dito pelos entrevistados, Guerra (2006) diferencia análise tipológica, categorial e de temática aprofundada. Após o seccionamento do texto de acordo com o seu sentido, a análise tipológica é o reagrupamento das diferentes partes em classes exclusivas seguindo critérios de proximidade do significado. Diz-se que

[14] As alterações ao modelo passaram apenas pela eliminação de aspetos pontuais que não se consideraram necessários para a sua compreensão.

as classes são exclusivas porque o que está incluído numa não está noutra. A análise categorial supõe a identificação de variáveis. Por exemplo, a categoria "do que gosto num problema" comporta uma variável que pode relacionar-se com um determinado fenómeno em estudo, no caso desta investigação, o tipo de problemas que formula livremente. Na análise de temática aprofundada "são identificados *corpus* centrais nas entrevistas a analisar em profundidade e, com recurso à identificação e à contagem de categorias e subcategorias, faz-se uma análise de conteúdo temática . . . e recompõem-se os fragmentos do discurso dispersos ao longo do texto" (pág. 83).

A análise interpretativa, de acordo com Guerra (2006), vai além da mera descrição, interrogando-se acerca da origem dos fenómenos à luz das questões do estudo e procurando o sentido subjacente à sua descrição. Pode passar por "conceber novos conceitos e avançar com proposições teóricas potencialmente explicativas do fenómeno que estuda", o que, "no contexto de uma investigação compreensiva . . . não pretende fazer uma demonstração causal, mas sim defender a plausibilidade dos resultados" (pág. 83).

O conjunto dos registos reunidos, o diário de campo e as entrevistas transcritas, embora extensas, cuja transcrição exigiu um trabalho demorado, não constituíam um *corpus* que exigisse uma análise muito complexa. Entende-se aqui por análise complexa a que seria necessário fazer se as entrevistas contivessem um discurso extenso e denso, versando vários tópicos, ideias entretecidas e retomadas em diferentes partes do texto. No caso desta investigação o texto é bastante direto, só se tornou complexo quando o entrevistado foi pouco explícito, ou se expressou com pouca clareza em virtude da omissão de conteúdo supostamente subentendido. Aconteceu muitas vezes com o Ricardo.

Os registos do diário e a transcrição das videogravações das entrevistas foram feitas em suporte eletrónico por meio de um processador de texto, isto é, não foi usado *software* próprio de transcrição.

<u>A análise das entrevistas</u>

Depois do trabalho de transcrição e apuramento do discurso (feito pelo investigador), o processo de análise começou pelo recorte do texto em unidades de registo, isto é, trechos dos diálogos que por si só constituíssem uma unidade de informação útil. Mesmo sabendo à partida o que procurar no discurso, discernir a codificação ou etiquetagem das unidades foi também um processo que se desenvolveu dialeticamente no decorrer do processo de recorte. Com exceção dos processos de formulação de problemas e do modo como o conhecimento matemático era mobilizado pelos alunos na invenção das perguntas ou contextos, poucos foram as categorias que tiveram de emergir no recorte do texto. O recorte do texto foi feito no próprio processador de texto recorrendo à ferramenta de inserção de tabelas. Cada unidade era inserida numa linha da tabela.

A Figura 12, na pág. 72, permite ter uma visão dos códigos que orientaram o recorte do texto das entrevistas e a constituição de unidades de registo com significado pertinente em função do objetivo e questões do estudo, ou seja, tudo o que o investigador considerou poder ter relação com os problemas formulados pelos alunos.

Algumas abreviaturas foram usadas no diagrama da Figura 12 para designar os temas curriculares: “Geo” para o tema Geometria que está unido ao tema da Medida, com abreviatura “Med”, o tema da Organização e Tratamento de Dados, com a abreviatura “OTD”, e “NO” para o tema Números e Operações. A abreviatura “Cálc” refere-se ao cálculo que não é um tema no currículo de matemática do ensino básico.

As <u>elipses</u> indicam as ações significativas dos entrevistados no curso do diálogo. Distinguiram-se duas em que os participantes falam sobre algo, uma para a explicitação de factos, ideias ou opiniões e outra para a expressão de interesses ou gostos pessoais, e outras duas para a realização das tarefas: a) as de formulação de problemas, b) as de resolução dos problemas formulados (ou de um eventual problema recordado ou proposto pelo investigador).

As <u>formas retangulares</u> distinguem-se:

a) As que são efetivamente <u>retângulos</u> indicam os assuntos alvo das perguntas do investigador, sobre os quais se exprimiam as opiniões ou os juízos de valor.
b) As que estão <u>arredondadas</u> no lugar dos vértices apontam para os enunciados dos problemas. Verifica-se que para além de problemas formulados pelos alunos houve também problemas evocados de memória e um ou outro proposto pelo investigador.
c) As que têm um <u>vértice truncado</u> remetem para as categorias de análise relativas aos processos de formulação de problemas e das resoluções, ainda que tais categorias não estejam aí explicitadas. Pode-se ver que para a análise dos processos de formulação de problemas não havia categorias previamente definidas, estas emergiram dos dados.

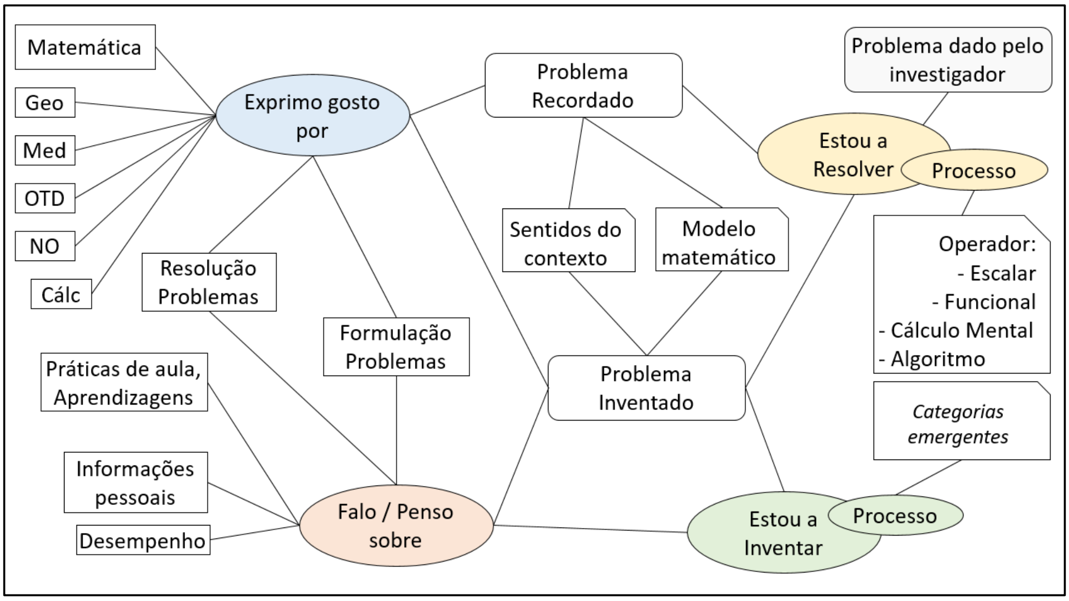


Figura 12: Diagrama das categorias que orientaram o recorte das entrevistas em unidades de registo.

Cada unidade de registo foi numerada numa coluna, o nome do entrevistado noutra, a data da entrevista outra e a etiquetagem noutra coluna. Isto permitia ordenar as unidades de registo por etiqueta, por aluno, por data, ou ainda pela combinação de várias, e voltar recompor a sequência do texto pela numeração das unidades. O agrupamento pelas etiquetas permitia discernir se o critério de etiquetagem tinha sido o mesmo para todos os entrevistados e fazer as correções necessárias. Muitas vezes foi necessário subdividir as unidades de registo inicialmente criadas e etiquetadas e especificar mais as etiquetas criando categorias mais estreitas. Uma sexta coluna foi depois criada para inserir excertos significativos do diálogo e uma interpretação do conteúdo de cada unidade. O facto de se poder agrupar, pela ordenação das unidades de acordo com a etiquetagem, a data da entrevista e o participante, possibilitava, ou melhor, potenciava a reflexão e a interpretação dos dados recolhidos, tanto numa visão global envolvendo todos os participantes como individualmente.

Numa segunda fase eliminou-se a coluna com o diálogo e passou a trabalhar-se só com a numeração das unidades, a etiquetagem e a interpretação. A Figura 13 mostra o resultado desta fase do processo.

52	Daniel	Formulação Enunciado	O Daniel lê os dados da tabela linha a linha.
53	Daniel	Formulação Interpretação da tabela	Após a leitura, começa por fazer uma interpretação da tabela identificando as relações entre os dados presentes: "quatro caixas têm dezasseis pasteis embalados; oito caixas têm trinta e dois pastéis embalados e dezasseis caixas têm sessenta e quatro pastéis embalados".
54	Daniel	Formulação Interpretação dos dados	"Eu sei que 4 vezes 4 [é dezasseis] que era a conta de multiplicar que eu tinha que fazer. Mas a conta que me ia dar o número de pastéis em cada caixa é 16÷4." Mais à frente vai voltar a dizer que também fez de multiplicar. Ele vai resistir e mostrar dificuldade em formular uma pergunta respondida por multiplicação.
55	Daniel	Formulação Processo	"Quando fiz a pergunta só tinha uma ideia da resposta, ainda não sabia." Não me parece que seja verdade, tendo em conta a facilidade de cáculo que mostra.
56	Daniel	Resolução	Confirma que a conta que dá a resposta é a de dividir. Para mim é importante que ele diga isto porque a tarefa especificava que tinha de fazer uma pergunta que fosse respondida por meio de uma multiplicação.
57	Daniel	Formulação Processo	Tenta dizer que cumpriu o pedido da tarefa porque também mostrou uma multiplicação.
58	Daniel	Formulação	Mas explica e justifica muito bem porque razão é a divisão a conta que responte à pergunta que fez

Figura 13: Excerto de uma fase do processo de análise da entrevista designada "Caixa de pastéis".

Sobre este documento, usando as possibilidades de reordenação das unidades de sentido, fez-se uma escrita reflexiva usando tanto as categorias de análise definidas *a priori* como identificando categorias emergentes relativas aos processos de formulação de problemas.

A análise do diário

A análise do diário seguiu um procedimento semelhante ao das entrevistas, usando as mesmas ferramentas do processador de texto. O texto foi recortado em unidades de registo, numa tabela com as colunas de numeração das unidades, o texto propriamente dito, e as colunas destinadas à identificação das unidades. Foram usados três séries de códigos.

A primeira codificação contava com:

- Ambiente de sala – referências ao modo de trabalho (coletivo, de grupo, individual), ao ambiente "emocional" (tenso, descontraído, silencioso,…)
- Disposição dos alunos – esquema da disposição das mesas de trabalho e o lugar ocupado por cada aluno ou aluna
- Entrevistas – indicações e reflexões sobre as entrevistas realizadas
- Índice de entrada no diário – título, data, palavras-chave do conteúdo do registo daquele dia
- Número de dia – dados obtidos da observação em tempo real da atividade e reflexões correspondentes
- Professora – reflexões de qualquer espécie sobre a professora
- Reflexões sobre a investigação – sobre o andamento do trabalho, as preocupações,…
- Seleção dos participantes – reflexões, critérios,… que diziam respeito à seleção dos participantes
- Trabalho da turma – conteúdo curricular em trabalho na aula
- Reuniões com a professora – conteúdo das conversas tidas com a professora, mas que não encaixava nos códigos acima enunciados.

Uma segunda etiquetagem foi feita independente da primeira, numa nova coluna da tabela. Dizia respeito a tópicos de conhecimento matemático (ou não) em discussão na aula. Tinha em conta o conhecimento matemático observado (e eventualmente de outra disciplina).

- Geral – aspetos gerais da ação dos alunos relativamente a tópicos matemáticos ou outros
- Adição – processos de cálculo (excluindo o cálculo mental)
- Divisão – idem
- Multiplicação – idem
- Subtração – idem

- Cálculo mental – comentários sobre o desempenho dos participantes (e outros alunos), incluindo estratégias, quando explicitadas.
- Resolução de problemas – comentários ao modo de trabalho e ao tipo de problemas
- Formulação de problemas – comentários às atividades de formulação observadas

A terceira codificação, numa nova coluna, identificava o aluno que era mencionado nas unidades já criadas pelos outros códigos.

Tal como foi feito para as entrevistas, a manipulação da ferramenta de ordenação permitiu o agrupamento de categorias semelhantes e a extração da informação relevante.

7. As tarefas

Neste capítulo são apresentadas cada uma das tarefas de formulação de problemas que foram aplicadas para nas entrevistas realizadas aos participantes neste estudo. As entrevistas foram uma imprescindível fonte de dados sobre os processos e o conhecimento matemático mobilizados por cada um dos participantes na formulação de problemas. Faz sentido, portanto, que o potencial de cada uma das tarefas seja analisado. Trata-se de expor aqui o conhecimento matemático passível de ser mobilizado e os sentidos que esse conhecimento pode ganhar nos contextos criados por quem formula o problema. Mas a apresentação e discussão desse conhecimento tem de contar com o conhecimento que está a ser desenvolvido nas aulas, ou seja, é preciso enquadrar cada tarefa tendo em conta o currículo em desenvolvimento.

Os conhecimentos matemáticos dos alunos estão naturalmente ligados ao que foi e é alvo de ensino nas aulas, pelo que poderá ser significativa a diferença entre o conhecimento manifestado por um aluno na realização de uma tarefa se esta for realizada antes, durante, ou depois de tal conhecimento ser efetivamente ensinado em aula. É necessário acautelar a eventual influência exercida pelo tema, tópico ou conteúdo em desenvolvimento na aula, sobre o problema formulado. Isto é tanto mais significativo quanto a tarefa de formulação for menos estruturada ou mais aberta em termos de contexto. Ou seja, quando a tarefa é a formulação livre de um problema, ou é a invenção de um contexto para uma expressão numérica, o enunciado de tal problema, seja na dimensão matemática como na dimensão do contexto, pode ser influenciado pelo currículo que está a ser vivido nas aulas nessa mesma ocasião. Neste estudo não se procura descobrir se há ou não essa relação mas, de qualquer modo, ela tem de ser tida em consideração, quanto mais não seja, para questionar os resultados obtidos.

A Tabela 6 (na pág. 77) localiza as entrevistas no período letivo, a par do currículo planeado. A tabela não mostra toda a planificação feita pela professora mostra apenas a planificação referente aos Números e Operações e à Medida e de uma maneira muito abreviada, por tópicos. Não se considerou indispensável mostrar todo o currículo, mas apenas aquele que é pano de fundo das entrevistas, ou seja, o essencial que envolve os Números e Operações e a Medida durante o tempo de trabalho de campo: do 1.º período do 3.º ano ao 1.º período do 4.º ano. Embora a última entrevista tenha sido feita no 2.º período do 4.º ano, não se mostra a planificação desse período. Não se considerou necessário porque a última entrevista foi realizada logo na primeira semana do 2.º período e incide sobre uma tarefa bastante estruturada, com um modelo matemático bem delimitado dentro do currículo trabalhado até ao fim do 1.º período. Para além disso, o currículo deste 2.º período começa no tema Geometria, especificamente sobre ângulos. A designação das entrevista baseia-se o estímulo dado para a formulação do problema.

Tabela 6: Relação temporal (set. de 2013 a jan. de 2015) entre o currículo planeado (Números e Operações e Medida) e as entrevistas realizadas.

Ano	Período	Conteúdos	Entrevistas
3.º	1.º	N.^{os} naturais até um milhão, adição, subtração e multiplicação; algoritmos. Múltiplo de um n.º. Cálculo mental: multiplicação por 10, 100, 1000 e produtos de n.^{os} de um algarismo por outros de dois algarismos. Problemas de até três passos.	–––
	2.º	N.^{os} naturais. Divisão inteira (por métodos informais). Relação dividendo, divisor, quociente e resto. Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10. Divisor e múltiplo. Problemas de até três passos. N.^{os} racionais não negativos. Fração como representação de medida (comprimento e outras grandezas). Representação em reta numérica. Fração própria. Fração equivalente. Ordenação de n.^{os} racionais (frações: igual numerador ou denominador). Adição e subtração de n.^{os} racionais (frações: igual denominador). Produto de um n.º natural por um racional (fração unitária). Frações decimais e representação em dízima. Redução de frações decimais ao mesmo denominador. Adição (frações decimais: denominadores até mil) Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas finitas.	**Livre** (1.ª parte – mar.24)
	3.º	Medida. Comprimento: unidades, conversões. Área: medições em unidades quadradas, fórmula da área de retângulos. Massa: unidades, pesagens, conversões. Capacidade: unidades, medições, conversões. Tempo: unidades, leitura de relógios de ponteiros, conversões, adição e subtração. Dinheiro: adição e subtração. Problemas de até três passos.	**30×25** (mai.16)
4.º	1.º	Números naturais. Divisão inteira, algoritmo. Determinação de divisores. N.^{os} racionais não negativos. Construção de frações equivalentes e simplificação. Multiplicação e divisão de n.^{os} racionais por naturais e racionais (fração unitária). Produto e quociente de um n.º (dízima) por: 10; 100; 1000; 0,1; 0,01; 0,001. Algoritmos da multiplicação e da divisão (envolvendo dízimas finitas). Problemas de vários passos envolvendo n.^{os} racionais e as quatro operações.	**Caixas de Pastéis** (out.9) **Livre** (2ª e 3ª parte: out.16.23) **3×6=18** (dez.2)
	2.º	–––	**Caixas de gelados** (jan.6)

O currículo exposto na Tabela 6 é um resumo da planificação feita pela professora, cujo texto é transcrição do currículo prescrito pelo Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013). Nessa medida ele não corresponde ao trabalho desenvolvido nas aulas, porque este não está compartimentado de forma exclusiva como aparece numa planificação do currículo prescrito. Ou seja, os objetivos curriculares especificados para um determinado período não se esgotam nesse período. Por exemplo, a aprendizagem dos algoritmos da multiplicação prolongou-se para além do 1.º período do 3.º ano, ou, o facto de a Medida estar programada para o 3.º período, não significa que a referência a medidas em enunciados de problemas não tenha ocorrido antes. Portanto, a planificação apresentada apenas dá a indicação do período em que estava prevista a iniciação aos conteúdos curriculares especificados. De um modo geral ela foi cumprida. Diz-se "de um modo geral" porque alguns tópicos já eram veiculados nas aulas antes do período para o qual estava programada a iniciação. Isso foi observado sobretudo nas atividades de cálculo mental que serão explicitadas com mais detalhe na exposição sobre as práticas de sala de aula.

As tarefas de formulação de problemas definidas para este estudo têm em conta as tipologias já definidas na literatura, nomeadamente as referidas por Stoyanova e Ellerton (1996) e Christou et al. (2005). Para além da formulação livre de um problema, isto é, a que é feita sem restrição do ponto de vista da tarefa, Christou et al. (2005) definem mais quatro categorias e associam a cada uma um processo cognitivo. Não se repetirá agora a definição destas categorias que foram já apresentadas neste estudo na seção sobre a formulação de problemas (ver na pág. 10). O processo cognitivo não é aqui alvo de estudo, mas serve para designar o tipo de tarefa. As tarefas usadas neste estudo são as que estão associadas ao processo *Compreender* ("30×25" e "3×6=18"), *Editar* ("Caixas de Gelados") e *Traduzir* ("Caixas de Pastéis"). As entrevistas são designadas pelo nome dado a cada tarefa.

A primeira entrevista, designada "Livre" por não incidir em tarefas estruturadas de formulação de problemas, cuja primeira parte é realizada na penúltima semana do 2.º período do 3.º ano, procura essencialmente conhecer os participantes no estudo, não envolvendo nenhuma atividade de formulação de problemas e não exige a mobilização de conhecimento matemático.

A segunda entrevista, designada "30×25", incide sobre a tarefa de formular o contexto de um problema modelado pela expressão numérica 30×25, ocorre a meio do 3.º período, altura em que os alunos estão a aprender noções de medida e procedimentos relacionados, como os modos de efetuar medições, conversões de unidades e procedimentos de cálculo.

É importante referir que a entrevista com base na tarefa "30×25" ocorre a 16 de maio, altura em que a noção de área tinha já sido abordada. Foi observado que quatro dias antes, a 12 de maio, os alunos resolveram uma tarefa em que eram chamados a desenhar retângulos de perímetro 20, de dimensões inteiras (recorrendo a palitos), construindo uma tabela onde registavam as dimensões dos retângulos e a respetiva área, observando a variação da área apesar do perímetro se manter igual, e relacionando a medida da área com o produto das medidas do comprimento e largura. Esta tarefa levou a que alguns alunos estendessem a tabela (usando as conclusões tiradas sobre a medida da área como produto das medidas das dimensões dos retângulos) registando as medidas referentes a retângulos com dimensões não inteiras, por exemplo, C=0,5; L=9,5; P=20 e A= 4,75. A multiplicação era um conhecimento já muito explorado, tendo os alunos bastante experiência na resolução de problemas com expressões numéricas da mesma ordem de grandeza e superiores e que, para efetuar essa operação, tinham já desenvolvido aprendizagens sobre vários processos de multiplicar fatores com dois algarismos, entre os quais o algoritmo, procedimento ao qual souberam recorrer nessa entrevista para efetuar o cálculo de 30×25. Mais adiante (secção 8.1.), na exposição das práticas das aulas de matemática, se apresentarão os processos não algorítmicos usados pelos alunos desde o início do 3.º ano para efetuar multiplicações e divisões.

A terceira entrevista, designada "Caixas de pastéis" ocorre no 4.º ano, na quarta semana de aulas. Esta entrevista centra-se na resolução de uma tarefa de formulação de problemas que envolve o conhecimento da multiplicação e divisão e a interpretação dos dados apresentados numa tabela de razão, ou seja, uma tabela que apresenta relações multiplicativas entre duas grandezas numa situação de proporcionalidade direta. As tabelas de razão, usadas em situações problemáticas, eram frequentes no 3.º ano, sobretudo no início, na aprendizagem da multiplicação, como forma de apresentar dados em situações de proporcionalidade, e eram também usadas como processo de cálculo antes da aprendizagem dos algoritmos da multiplicação e divisão, os quais progressivamente se tornaram ferramentas exclusivas para efetuar tais operações. Trata-se portanto de um conhecimento já desenvolvido mas que, após a iniciação à multiplicação e depois da aprendizagem dos algoritmos da multiplicação e divisão caiu em desuso.

A quarta e quinta entrevista correspondem à segunda e terceira parte da designada entrevista "Livre". Foram realizadas na quinta e sexta semana de aulas. Essencialmente é pedido aos participantes que evoquem problemas que tenham guardado na memória por alguma razão – gosto, novidade, dificuldade… – e que formulem a seu gosto um problema. Por ser uma tarefa de formulação livre de constrangimentos maiores, o conhecimento matemático evocado pelos alunos é aquele que quiserem. Como se pode observar na leitura das entrevistas, uns mobilizaram conhecimentos ensinados há mais tempo e outros mobilizaram aprendizagens mais recentes ou em desenvolvimento.

A sexta entrevista, designada "3×6=18" por incidir na formulação de contextos para dar sentido a esta expressão, é realizada a duas semanas do final do primeiro período do 4.º ano. O conhecimento que ela envolve é muito elementar quando comparado com o conhecimento que está em desenvolvimento nas aulas. É uma tarefa que não exige outro conhecimento senão a compreensão da operação multiplicação e domínio de situações em que ela ganha significado. A tarefa foi pensada exatamente para que a exigência de cálculo não acrescentasse dificuldade à formulação do contexto e assim se pudesse manifestar somente a compreensão da multiplicação.

A última entrevista, designada “Caixas de gelados”, assenta na resolução de uma tarefa que permite a formulação de várias perguntas, diferentes quanto ao objeto, mobilizando diferentes conhecimentos tanto do ponto de vista da formulação como da resolução do problema formulado. Por um lado, fazer uma pergunta que seja resolvida por uma simples multiplicação exige a consideração criteriosa dos dados apresentados no enunciado da tarefa. Por outro lado, a resolução de uma pergunta tão simples quanto querer saber o custo de um gelado exige o domínio da divisão envolvendo números fracionários representados na forma de dízima. Este domínio das competências de cálculo e de experiência na resolução de problemas de estrutura multiplicativa, de acordo com o currículo planificado pela professora, só estaria fechado no final do primeiro período do 4.º ano. Convinha, portanto, que esta tarefa só fosse aplicada depois de finalizado o ensino destes conteúdos curriculares.

Concluindo, o conhecimento matemático implicado em cada tarefa nunca coincidiu temporalmente com o conhecimento em desenvolvimento nas aulas, estando sempre atrasado no tempo. Pretendia-se evitar que as tarefas envolvessem conhecimento não ensinado. Mais, considerando que a aprendizagem se prolonga e se demora (Vergnaud, 1983), pretendia-se mesmo que houvesse um desfasamento temporal significativo entre o início do ensino de um determinado conhecimento e a sua presença numa tarefa.

7.1. A tarefa “30×25”

Inventa um problema que possa ser resolvido com a seguinte operação:

30 x 25 =

Figura 14: Enunciado da tarefa "30×25"

Esta tarefa foi resolvida pelos participantes na entrevista realizada no terceiro período do 3.º ano (2014.05.16). A tarefa foi apresentada aos alunos no início da entrevista, como um ponto de partida.

Uma vez que a tarefa consiste em formular um problema (uma situação-contexto), adequado à expressão de cálculo que é apresentada, pode enquadrar-se esta tarefa na classe das semiestruturadas de acordo com os exemplos dados por Stoyanova e Ellerton (1996). A este tipo de tarefas, Christou et al. (2005) associam o processo cognitivo *Compreender*.

Para a expressão numérica foram escolhidos números que não facilitassem nem dificultassem em demasia o seu uso tanto na execução do algoritmo como em processos de cálculo mental. Vinte e cinco por ser um número ligado a factos numéricos ou números de referência mais conhecidos: metade de 50 e um quarto de 100. Trinta por ser um múltiplo de 10 cuja decomposição aditiva (10+10+10) e multiplicativa (3×10) é fácil de usar mentalmente. O facto de terem ambos mais do que um algarismo faz com que a realização do algoritmo não seja trivial, podendo observar-se o conhecimento (ou não) dos procedimentos.

Imaginar um contexto problemático que seja resolvido pelo cálculo apresentado coloca em jogo i) a criatividade do aluno que pode inspirar-se (ou não) na realidade quotidiana, ii) o conhecimento matemático relativo à multiplicação.

A realidade do quotidiano é muitas vezes usada como contexto para o ensino e aprendizagem das operações. A operação é apreendida por meio da modelação de situações da realidade. Mas para além disso há conhecimento sobre a operação que não é passível de ser contextualizado pela realidade do dia-a-dia, por exemplo, propriedades e estratégias de cálculo, que são explorados em contextos mais abstratos. Ainda assim, nestes primeiros anos de escolaridade os contextos realísticos têm um grande peso. Como se pode observar na tabela que relaciona o calendário das entrevistas e o currículo (Tabela 6, na pág. 77), a tarefa foi realizada na altura em que se desenvolvia trabalho sobre grandezas e medida, o que poderia favorecer a escolha de contextos ligados à medida em grandezas como comprimento, área, massa, capacidade, tempo e dinheiro.

O enunciado escrito da tarefa (Figura 14, na pág.80) não é totalmente explícito relativamente ao que se pretendia e o que lhe falta foi pedido oralmente: a formulação de um contexto próximo da realidade quotidiana.

O conhecimento matemático que pode ser observado numa tarefa deste tipo, com a intenção acima enunciada, tem a ver com a capacidade de identificar as situações onde a multiplicação, especificamente a expressão dada, é a operação que modela a situação problemática imaginada. Essencialmente isso traduz-se pela qualidade dos referentes que podem ser atribuídos aos números envolvidos na expressão numérica. Nesse sentido, são importantes as análises das situações modeladas pela multiplicação e divisão propostas por Greer (1992) Schwartz (1988) e Vergnaud (1983).

Uma vez que a expressão envolve números inteiros, os referentes atribuídos tanto podem designar grandezas discretas (livros, carros, brinquedos,…) como grandezas contínuas (comprimento, área, dinheiro,…), ou seja, se fossem racionais não inteiros não poderiam referir-se a grandezas discretas. Podendo referir-se tanto a grandezas contínuas como discretas é maior o leque das classes de situações em que podem ser enquadradas as situações/contextos imaginados.

De acordo com Vergnaud (1983, 1988), pode dizer-se que as situações passíveis de serem criadas a partir da expressão numérica envolvida nesta tarefa estão incluídas no Isomorfismo de medidas e no Produto de medidas, neste último caso, o produto cartesiano ou a determinação da área de um retângulo. A classe de situações de dupla proporção está naturalmente excluída pois as expressões têm apenas dois fatores. Há, no entanto, a possibilidade de se criar uma situação de Comparação multiplicativa (ver Tabela 3, na pág. 47).

Poderá ser legítimo perguntar se uma situação de Comparação multiplicativa está dentro da classe do Isomorfismo de medidas definida por Vergnaud. A situação de Comparação multiplicativa dada como exemplo na Tabela 3 é "O João tem triplo do dinheiro do António. Se o António tem 25€ quanto tem o João?", para que se enquadre dentro do Isomorfismo de medidas é preciso considerá-la também como uma situação de proporcionalidade, ou seja, o dinheiro do João e do António variam proporcionalmente. Um exemplo de uma situação em que isto não seria possível seria a relação entre a idade do João e a do António. O contexto "idade" não permite situações de proporcionalidade.

Tendo em consideração a perspetiva de Schwartz (1988) para a multiplicação e divisão, as situações inventadas nesta tarefa podem ser enquadradas em qualquer das tríades IEE', EE'E'' e II'I''. No entanto, não é expectável que os alunos formulem problemas envolvendo apenas quantidades intensivas (tríade II'I''). Na tríade EE'E'', isto é, no produto de duas quantidades extensivas (E×E'=E'') estão situações como as de cálculo da área de um retângulo ou de objetos numa disposição retangular e as de produto cartesiano. Na tríade IEE' enquadram-se as situações que pertencem também à classe do Isomorfismo de medidas de Vergnaud.

A maioria das situações usadas no ensino da multiplicação enquadram-se na tríade IEE', particularmente na classe Grupos iguais definida em Greer (1992). Por exemplo, no manual escolar do 3.º ano adotado na turma dos alunos participantes neste estudo, o tópico da multiplicação de números naturais ocorre desde a página 73 à 96 e envolve 36 situações contextualizadas no quotidiano, das quais 29 pertencem à classe Grupos iguais, 4 à classe Medidas iguais e 3 são de Produto cartesiano (nas primeiras páginas). As 4 situações que pertencem à classe Medidas iguais, uma vez que envolvem apenas números naturais, ainda que se refiram a grandezas contínuas, podem ser tidas como situações de Grupos iguais. As situações enquadradas na classe Grupos iguais são tidas como facilitadoras da compreensão da multiplicação na medida em que a apresentam como uma adição repetida de parcelas iguais (Fischbein, Deri, Nello e Marino, 1985). A multiplicação tida deste modo funciona dentro do Isomorfismo de medidas para situações enquadradas pela classe Grupos iguais (Greer, 1992). Nesta classe é necessário que um dos fatores do produto esteja referido a uma quantidade intensiva e esta exigência é a que pode constituir uma dificuldade na formulação de um contexto quotidiano para um problema modelado pela multiplicação (Schwartz, 1988). Referir um dos fatores a uma quantidade intensiva não é necessário se a situação criada envolva um produto cartesiano ou o cálculo da área de um retângulo.

7.2. A Tarefa "Caixas de Pastéis"

Os pais do António têm uma pastelaria. Um dia ele esteve a ajudar o pai a embalar uns pastéis que são vendidos em caixas iguais.
À medida que ia colocando os pastéis nas caixas, o António ia escrevendo:

Número de caixas →	...	4	8	16	...
Número de pastéis embalados →	...	16	32	64	...

Faz uma pergunta para um problema que seja resolvido com uma multiplicação.

Figura 15: Enunciado da tarefa "Caixa de pastéis".

Esta tarefa (Figura 15) foi resolvida pelos participantes na entrevista feita na quarta semana de aulas, no primeiro período do 4.º ano (2014.10.19).

Nesta tarefa são apresentados dados numéricos numa tabela cuja interpretação é essencial para entender as relações estabelecidas entre eles. Tais relações não são totalmente explícitas, nomeadamente as relações numéricas. O contexto contribui para uma interpretação da tabela. Por fim, a tarefa pede que o problema formulado seja modelado por uma multiplicação. Tendo em atenção, apenas o facto de os dados serem apresentados numa tabela e ser pedida uma pergunta modelada por uma dada operação, classifica-se a tarefa nas que envolvem o processo *Traduzir* definido por Christou et al. (2005). No entanto, o contexto da pastelaria e da embalagem dos pastéis fornece um ambiente, uma história, que antecipa ou condiciona a interpretação da tabela e esta aparece como uma forma sintética de apresentar os dados. Nessa medida, a tarefa está muito próxima das que envolvem o processo *Editar* (Christou et al., 2005). A inclusão nas que envolvem o processo *Traduzir* exige-se pelo facto dos dados serem apresentados numa representação matemática bem definida e ser pedida que a resolução passe por uma determinada operação (outra representação).

Dado que estamos perante o enunciado de um problema em que os dados e as relações entre eles estão definidas, consistindo a tarefa de formulação na explicitação das perguntas, pode-se enquadrar esta tarefa na classe das estruturadas, definida por Stoyanova e Ellerton (1996).

Esta tarefa apresenta uma coleção de dados distribuídos espacialmente numa tabela, estabelecendo entre eles relações não explícitas, isto é, as relações têm necessariamente de resultar de uma interpretação.

Há uma relação de proporcionalidade direta entre duas grandezas: o número de caixas e o número de pastéis. Trata-se de uma situação que se enquadra dentro do Isomorfismo de medidas. A Figura 16 dá visibilidade às relações multiplicativas entre os dados numéricos apresentados na situação. A relação multiplicativa visível verticalmente é de quádruplo-quarta parte. É a relação funcional ou constante de proporcionalidade. A relação multiplicativa que se observa horizontalmente entre dois números seguidos, tanto no número de caixas como no número de pastéis, é de dobro-metade e refere-se à covariação das duas variáveis.

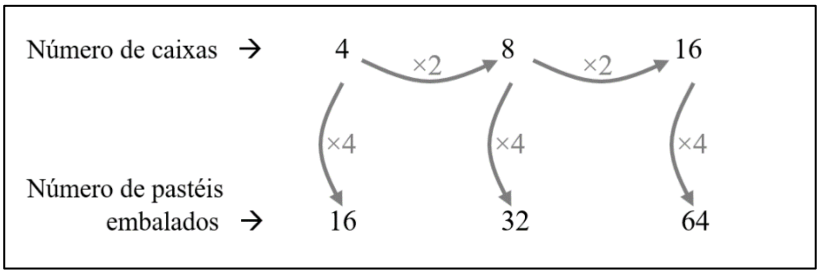


Figura 16: Relações multiplicativas entre os dados apresentados na tarefa "Caixa de Pastéis".

Podem ser feitas várias perguntas, mas todas têm de ser solucionadas por meio de uma multiplicação. Se se quiser manter o contexto realista explicitado no enunciado, as perguntas dirigem-se ao número de pastéis embalados num determinado número de caixas ou ao número de caixas necessárias para embalar um determinado número de pastéis. Para cumprir estas restrições (uma só multiplicação dentro do contexto realista) é preciso acrescentar um novo dado na pergunta[15]. E para que a resposta envolva apenas uma operação é preciso que o dado introduzido seja criteriosamente escolhido. O critério para a seleção do dado a introduzir tem de ser deduzido da interpretação da tabela. O que se afirma neste parágrafo parte do princípio de que a formulação da pergunta supõe e depende da antevisão da resolução. E é assim mesmo, porque é exatamente isso que a tarefa pede: que a pergunta seja respondida com recurso a uma multiplicação. Pensar numa pergunta nestas condições exige uma cuidadosa observação dos dados.

Quem, olhando para os dados, observa a sequência de dobros (4, 8, 16) no número de caixas e a correspondente (16, 32, 64) no números de pastéis embalados, pode ser levado a perguntar sobre o número de pastéis que são embalados em 32 caixas, cuja resposta é dada pela multiplicação 2×64 pastéis. O dado "32 caixas" tem de ser introduzido na pergunta. Este dado, o número 32, não é escolhido ao acaso, mas exatamente porque se observou a relação multiplicativa "dobro" e se tem a certeza de poder encontrar uma resposta à pergunta antevendo a multiplicação 2×64. Embora seja

[15] A pergunta "quantas vezes o número de pastéis embalados é maior que o número de caixas?" não acrescenta nenhum dado e pode ser equacionada numa multiplicação, contudo não manifesta um interesse pela realidade que contextualiza o problema. Ela é essencial na interpretação matemática da tabela.

possível, não é espectável que, desejando-se saber responder à pergunta que se faz, se introduza um número qualquer. Ainda dentro do conhecimento desta relação de dobro também se poderia responder por meio de uma multiplicação à pergunta sobre o número de caixas necessárias para embalar 128 pastéis (ao dobro de 64 pastéis corresponderiam o dobro de 16 caixas).

Num nível de conhecimento superior mas ainda dentro da relação de covariação das variáveis dentro das grandezas, quem souber que pode usar qualquer outra relação multiplicativa como o triplo, o quádruplo,… pode inserir outros valores. Por exemplo, pode perguntar sobre o número de pastéis embalados em 12 caixas (o triplo de 4), respondendo através da multiplicação 3×16 pastéis.

Se é preciso ser criterioso na escolha do dado a introduzir na pergunta pelo facto de só se ter apercebido da relação de covariação dos dados apresentados, tal exigência não é necessária para quem é capaz de observar a relação funcional entre as grandezas.

Quem é capaz de, olhando para os dados apresentados, perceber que há 4 pastéis por caixa porque o número de pastéis embalados é sempre 4 vezes superior ao número de caixas, pode selecionar, para inserir na pergunta, um valor qualquer. Saber quantos pastéis são embalados em n caixas é possível pela operação 4 pastéis/caixa × n caixas. Tendo como dado apenas a relação funcional (o número de pastéis por caixa) não será espectável que os alunos formulem uma pergunta que procure determinar quantas caixas são necessárias para embalar m pastéis uma vez que isso implicaria uma divisão por 4 e não uma multiplicação, se bem que isso pudesse ser ultrapassado multiplicando o número de pastéis por 1/4. Além disso, dado que o número de caixas é sempre menor que o número de pastéis, tal pergunta teria de ultrapassar o modelo primitivo e intuitivo básico da multiplicação pelo qual se pensa que o produto é (sempre) maior que os fatores (Fischbein, Deri, Nello e Marino, 1985).

Resumindo, para dar resposta às condições impostas pela tarefa é necessário que os alunos interpretem os dados apresentados e retirem daí, como dado adicional, a relação funcional ou a relação escalar (ou ambas). Tanto com uma informação como com a outra, a pergunta mais plausível é a que procura saber quantos pastéis são embalados em n caixas na medida em que ela se adequaria ao modelo intuitivo da multiplicação. É também possível fazer uma pergunta sobre o número de caixas necessárias para embalar uma quantidade de pastéis, mas tal aconteceria, provavelmente, tendo por base a identificação do fator escalar (a covariação). Num estudo mencionado por Vergnaud (1983), tendo como participantes alunos com idade compreendida entre os 11 e 15 anos, verificou-se que o recurso ao fator escalar na resolução de problemas de proporcionalidade foi o processo mais frequente.

Na resolução desta tarefa esperava-se que os alunos identificassem com maior facilidade o fator escalar dentro das grandezas e formulassem uma pergunta que procurasse saber o número de pastéis em função do número de caixas, muito provavelmente 32 caixas por ser esse o número de caixas que se seguiria após na sequência apresentada na tabela.

7.3. Tarefa: “3×6=18”

Inventa um problema para cada uma das expressões:

3 × 6 = ?	**3 × ? = 18**	**? × 6 = 18**

Figura 17: Enunciado da tarefa “3×6=18”.

Esta tarefa (Figura 17) foi resolvida pelos participantes na entrevista que ocorreu no final do primeiro período do 4.º ano (2014.12.02).

Uma vez que se trata de formular um problema (uma situação-contexto), adequado à expressão de cálculo que é apresentada, pode-se enquadrar esta tarefa na classe das semiestruturadas definida de acordo com Stoyanova e Ellerton (1996). A este tipo de tarefas, Christou et al. (2005) associam o processo cognitivo *Compreender*. Essencialmente, esta tarefa é do mesmo tipo da primeira (“30×25”) e muito do que se disse relativamente a ela aplica-se a esta.

O modo como a tarefa devia ser apresentada aos alunos foi considerada importante e não se identifica, do ponto de vista gráfico, visual, com a imagem acima exibida. Aos alunos foram entregues pequenos cartões, cada um dos quais mostrava apenas uma expressão numérica. Era-lhes então solicitado que escolhessem um dos cartões e que formulassem o contexto de um problema para a expressão nele contida. Isto permitia que:

1. os alunos tivessem presentes simultaneamente as três expressões numéricas;
2. se sentissem livres de escolher as expressões pela ordem que quisessem, eventualmente começando pela considerada mais fácil, ou mais interessante, etc.;
3. se concentrassem apenas numa de cada vez.

À semelhança da tarefa “30×25”, imaginar um contexto problemático que seja resolvido pelas expressões de cálculo apresentadas, esta tarefa apela à criatividade do aluno na criação do contexto, baseando-o (ou não) na realidade quotidiana, e mobiliza o conhecimento matemático relativo à multiplicação. Em particular, nesta tarefa pretendeu-se dar destaque à criação do contexto e libertar o aluno de qualquer preocupação com o cálculo. Para além disso, coloca a multiplicação em relação com a divisão.

Tal como na tarefa “30×25” procurou-se que os problemas formulados envolvessem contextos do quotidiano. Esta intenção permitiria observar, numa tarefa deste tipo, a capacidade de identificar as situações onde a multiplicação, em particular as expressões fornecidas, é a operação que modela a situação problemática formulada. Não sendo claramente uma situação do quotidiano, não se rejeitaria um problema que envolvesse, por exemplo, a determinação da área de um retângulo. O que interessa é dar conta da compreensão que o aluno tem sobre a multiplicação e divisão. Os referentes escolhidos para os números envolvidos na expressão e o modo como são relacionados no contexto são os indicadores de tal compreensão.

A Tabela 7 mostra em que classes de situações podem ser enquadrados os problemas passíveis de serem criados pelos participantes neste estudo nesta tarefa. Agruparam-se as classes Grupos iguais e Medidas iguais porque sendo inteiros os números envolvidos, mesmo que um deles se referisse a uma grandeza contínua a situação poderia ser encarada do mesmo modo pelos alunos. Também, e pelo mesmo motivo, se reuniram as classes Disposição retangular e Área retangular. A linha tracejada sugere que podem ser formuladas situações de Comparação multiplicativa cujo contexto, por poder não ser de proporcionalidade (comparação multiplicativa da idade de duas pessoas), não se enquadre no Isomorfismo de medidas.

Tabela 7: Classes de situações que enquadram os problemas passiveis de serem criados na tarefa "3×6=18"

Classes de situações		Tríade IEE’			Tríade EE’E’’		
		I×E=E’	E’÷I=E	E’÷E=I	E×E’=E’’	E’’÷E=E’	E’’÷E’=E
Isomorfismo de medidas	Grupos / Medidas iguais	3×6=?	18÷3=?	18÷6=?			
	Comparação Multiplic.	3×6=?	18÷3=?	18÷6=?			
Produto de medidas	Disposição / Área retang.				3×6=?	18÷3=?	18÷6=?
	Produto cartesiano				3×6=?	18÷3=?	18÷6=?

A classe Comparação multiplicativa

Tendo em consideração a perspetiva de Schwartz (1988) para a multiplicação e divisão, as situações inventadas nesta tarefa podem ser enquadradas em qualquer das tríades IEE’, EE’E’’ e II’I’’. No entanto, não é expectável que os alunos formulem problemas envolvendo apenas quantidades intensivas (tríade II'I''), daí não se ter incluído esta classe na tabela. Na tríade EE'E'', isto é, no produto de duas quantidades extensivas (E×E'=E'') estão situações como as de cálculo da área de um retângulo ou de objetos numa disposição retangular e o produto cartesiano. São situações quem que o produto de duas grandezas extensivas resulta também numa grandeza extensiva. Nesta tríade não há dois tipos de divisão como na tríade IEE onde estão a divisão com sentido de partilha equitativa e com sentido de medida. Na tríade EE'E'' há um tipo de divisão que se se encara apenas como sendo a operação inversa da multiplicação (ver Tabela 3 na pág. 47).

7.4. Tarefa: "Caixas de gelados"

Lê o seguinte texto.

> No fim-de-semana passado o pai do Francisco trouxe 6 caixas de gelados do supermercado e só gastou 7,20 €. Que sorte! Ao todo, foram 24 gelados a um preço irresistível! Foi uma promoção que dizia "leve três caixas e pague duas".

Descobre as perguntas que podem ser feitas para transformar este texto em problemas de matemática.

Figura 18: Enunciado da tarefa "Caixas de gelados".

Esta tarefa (Figura 18) foi resolvida pelos participantes na entrevista realizada no segundo dia de aulas do 2.º período do 4.º ano (2015.01.06).

Tratando-se de uma tarefa que apresenta o enunciado do problema ao qual foi omitida a pergunta e que, consequentemente é preciso formulá-la, enquadra-se esta tarefas na categoria das estruturadas (Stoyanova e Ellerton, 1996). Por se tratar de aproveitar os dados apresentados (a história) para formular o problema, pode associar-se à resolução da tarefa o processo *Editar* definido por Christou et al. (2005).

Esta situação permite formular perguntas que colocam problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta e que, nessa medida, se enquadram no Isomorfismo de medidas dentro das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983). Permite também formular outros problemas cuja solução não se obtém simplesmente através de multiplicações ou divisões e que, por tal, não caem dentro dessa categoria de situações. Umas e outras podem ser arrumadas em grupos de acordo com os dados ou condições que colocam em relação:

A. número de caixas e número de gelados;
B. número do que foi adquirido e do que foi efetivamente pago
C. custo de caixas ou de gelados, considerando ou não a promoção;

Grupo A

As perguntas que podem ser formuladas dentro do grupo A partem da informação de que há 6 caixas (iguais – especificação que não consta no enunciado escrito, mas foi assim entendida) que, no total, contêm 24 gelados. Essas perguntas procuram a determinação de:

a) o número de gelados por caixa,
b) o número de gelados em *n* caixas,
c) o número de caixas para *n* gelados.

No caso da alínea a), há apenas uma única pergunta possível. O enunciado fornece o número de gelados em 6 caixas e é procurado o número de gelados numa só caixa. A operação que resolve a situação é uma divisão. Estes problemas são muito vulgares no ensino da divisão e foi um dos problemas formulados pelos alunos. De acordo com (Greer, 1992) são contextos que dão à divisão o sentido de partilha equitativa. O problema colocado por esta questão é resolvido pela divisão dos dois números fornecidos no enunciado, neste caso 24 gelados ÷ 6 caixas. O quociente desta divisão, no quadro das classes de situações enquadradas por Vergnaud no Isomorfismo de medidas, é o valor da relação funcional 4 pastéis por caixa, isto é,

$$24 \text{ pastéis} \div 6 \text{ caixas} = 4 \text{ pastéis/caixa}$$

No caso da alínea b) só estão definidos explicitamente no contexto fornecido dois números (6 caixas iguais com 24 gelados ao todo) e a pergunta tem de acrescentar irremediavelmente um novo dado (*n*) que se refere ao número de caixas. A resolução desta situação acarreta várias dificuldades consoante o valor de *n*, acrescentado pela pergunta, e a relação que esse número tem com as 6 caixas do enunciado. Seja como for há dois processos básicos para resolver este problema: usar a relação escalar ou a relação funcional.

Se *n* assumir o valor de um número que tenha uma relação de metade, dobro, ou outra dentro dos múltiplos de 6 (e próxima de 6) a resolução do problema é muito intuitiva. Se *n* for 3, é fácil reconhecer a relação de que 3 é metade de 6 e que, consequentemente, o número de gelados é metade de 24; se *n* for 12, basta reconhecer que 12 é o dobro de 6 e que o número de gelados será o dobro de 24. Trata-se, portanto, de reconhecer a relação multiplicativa, o escalar, entre os dois valores *dentro* da mesma grandeza (número de caixas) e aplicar essa relação ao valor da outra grandeza (número de gelados). Se a relação escalar não for facilmente identificável pode-se ainda recorrer a ela, mas é preciso encontrá-la primeiro, dividindo *n* por 6, e depois usar esse quociente para multiplicar por 24 pastéis e assim encontrar o número de pastéis em *n* caixas.

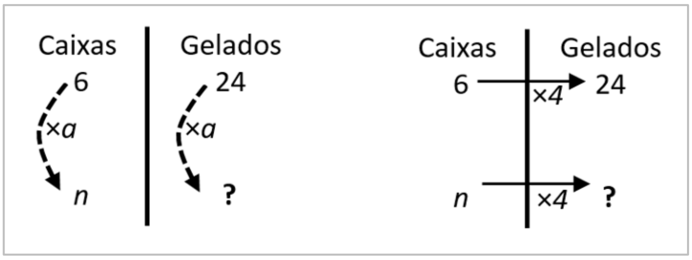


Figura 19: Representação das relações que permitem a determinação do número de gelados.

O outro processo de resolução passa por descobrir a razão (relação funcional) entre 24 e 6 (24 é 4 vezes maior que 6), e aplicar essa relação a *n* (a incógnita será 4 vezes maior que *n*). Ou seja, procura-se a relação multiplicativa *entre* dois valores de grandezas diferentes e aplica-se essa relação a *n* para descobrir a incógnita. São envolvidas duas operações que, na maioria dos casos, são ambas apresentadas explicitamente pelos alunos da resolução do problema: a divisão (24÷6) para saber o número de gelados por caixa e a multiplicação deste quociente pelo número de caixas definido (*n*). Uma das alunas formulou um problema deste tipo e mostrou conhecer os dois processos de resolução (Figura 19, na pág.90).

Entre as perguntas que incidem em c), só estão abrangidas pela proporcionalidade direta aquelas em que o número de gelados, que é acrescentado pela pergunta, é múltiplo de 4[16]. Para se perceber esta situação, antes de mais, é preciso frisar que, de acordo com os dados fornecidos no enunciado da tarefa, não se sabe ainda o número de gelados por caixa. Os dados fornecidos continuam a ser 6 caixas e 24 gelados.

As situações mais simples são as que definem 48 ou 12 para o valor de *n*. Assim, como já acima se referiu, um aluno pode verificar que 48 é o dobro de 24 e, consequentemente o número de caixas será o dobro de 6, ou que 12 é metade de 24 e, então, o número de caixas será metade de 6.

Se os valores fixados para *n* não estabelecerem com 24 relações multiplicativas, cujo fator escalar seja facilmente identificado por um aluno, então o processo de resolução tem de ser outro. Passa por determinar o número de gelados por caixa que será o divisor de *n* para se identificar o número de caixas.

Grupo B

Neste grupo, incluem-se as perguntas que se cingem ao que é possível saber a partir da condição proposta pela promoção "leve 3 caixas e pague 2".

d) número de caixas pagas em 6 caixas adquiridas
e) número de caixas pagas em *n* caixas adquiridas

[16] Ou múltiplo de 12 caso a incógnita seja o número de conjuntos (packs) de 3 caixas para n gelados. Não se considera necessário detalhar este caso nesta análise.

f) número de caixas adquiridas em *n* caixas pagas

A pergunta que incide em d) impõe-se por força do enunciado e descobre uma informação particularmente interessante ou necessária para ser usada nas perguntas que procuram saber o custo das caixas ou gelados sem ter em conta a promoção. Pode resolver-se recorrendo a dois processos: *i)* encontrar o escalar pelo qual se multiplica 3 caixas para se obter 6 caixas e usá-lo para multiplicar o número de caixas pagas em 3 adquiridas; *ii)* encontrar a razão de proporcionalidade dividindo 2 por 3 e usá-la para multiplicar 6. Este último processo não é espectável por não ter sido alvo de ensino. A dificuldade estaria em identificar e trabalhar com a fração 2/3 que representa a razão entre caixas pagas e adquiridas.

As alíneas e) e f) são sugestionadas pela alínea d) em virtude desta incidir sobre a relação entre caixas pagas e caixas adquiridas. Tal como se disse acima, (para a alínea c), nestas duas alíneas, *n* não pode assumir qualquer valor, sob pena de se criar um problema não abrangido pelo Isomorfismo de medidas. Para se manter o Isomorfismo de medidas, isto é, problemas resolvidos apenas por multiplicações ou divisões, é necessário que *n* seja um múltiplo de três caso a incógnita seja o número de caixas pagas em *n* adquiridas (alínea e), ou que seja um múltiplo de dois caso a incógnita seja o número de caixas adquiridas em *n* caixas pagas (alínea f).

Portanto, as perguntas para formulação de problemas situados na classe do Isomorfismo de medidas necessitam de incidir apenas em conjuntos (*packs*) de 3 caixas como unidade, ou seja, o artigo não pode ser vendido senão em *pack* de 3 caixas. Assim, o enunciado de uma pergunta dentro da alínea e) deverá questionar "número de caixas pagas em 3 (6, 9, 12, …) caixas adquiridas". E uma pergunta feita dentro da alínea f) deverá questionar o número caixas adquiridas tendo sido pagas 2 (4, 6, 8, …) caixas. Entre as perguntas formuladas pelos alunos nenhuma incidiu nas alíneas e) e f), mas a alínea d) foi considerada por alguns.

Grupos C

Neste grupo as perguntas incidem sobre o custo mas, em cada alínea, há duas perguntas diferentes consoante a pergunta considere ou não a condição promocional.

g) custo de uma caixa de gelados

h) custo de um gelado

i) custo de *n* caixas de gelados

j) custo de *n* gelados

Considerar ou não a condição promocional permite comparar o custo dos artigos adquiridos com ou sem promoção. Esta comparação é uma questão interessante do ponto de vista da realidade. No primeiro caso trabalha-se com a informação de que foram adquiridas 6 caixas, com 24 gelados, por 7,20€. No segundo caso é preciso ter em conta que 7,20€ é o custo de 4 caixas, um total de 16 gelados. Assim sendo, a formulação de perguntas no âmbito destas alíneas exige que seja explícita a incidência no custo com promoção ou sem promoção. Por exemplo, a pergunta "Quanto custou uma caixa de gelados?" não é suficientemente clara quanto ao custo a considerar. Parece mais provável que um aluno a relacione com os dados explícitos (7,20÷6) e não coloque a hipótese de poder calcular o custo das caixas se não houvesse a condição promocional. De facto aconteceu: o Daniel e a Madalena fizeram a mesma pergunta, quanto custava uma caixa, mas o Daniel subentendendo o custo sem promoção e a Madalena subentendendo o custo com a promoção.

As perguntas que incidem nas alíneas i) e j)[17] colocam problemas mais complexos, como se pode perceber pelo que já foi dito para a alínea f), quando se pretende que os problemas passíveis de serem formulados se mantenham dentro do Isomorfismo de medidas, isto é, a resposta a perguntas desse tipo só são resolvidas recorrendo unicamente às operações de multiplicação ou de divisão se os números atribuídos a *n* forem, por exemplo, múltiplos de 3, no caso de se pretender saber o custo de caixas considerando o preço promocional.

Neste grupo de perguntas temos ainda a considerar as que incidem sobre o

k) número de caixas adquiridas com *x* euros,

l) número de gelados adquiridos com *x* euros.

Escolher um número para *x* na formulação de perguntas que incidam nestas duas alíneas é uma tarefa mais difícil quando se deseja que esse número corresponda ao valor exato de uma compra. É verdade que se pode escolher um número qualquer mas, nesse caso, a resolução implica a interpretação do resto nas divisões.

Seja como for, de acordo com Vergnaud, o envolvimento de números não inteiros torna as situações mais difíceis.

Outras perguntas

A liberdade tomada por quem realiza a tarefa pode conduzir a muitas outras perguntas. Por exemplo, as que incidem sobre o troco que o pai do Francisco tem de receber se pagar a compra com *x* euros.

[17] Na verdade, não faz grande sentido determinar o custo de *n* gelados por que eles não podem ser adquiridos avulso.

8. Apresentação e discussão de resultados

Segue a exposição dos resultados obtidos neste estudo. Antes de apresentar o que foi obtido de cada um dos participantes neste estudo, começa-se por expor brevemente as práticas comuns do dia-a-dia nas aulas de matemática. Entendeu-se que o ambiente vivido nas aulas, as atividades realizadas, especificamente as atividades de caráter rotineiro, eram fatores que não podiam ser ignorados na análise do conhecimento matemático mobilizado na resolução das tarefas de formulação dos problemas, tanto mais quando o objetivo deste estudo envolve a descrição e compreensão de tal conhecimento. Deste modo, este capítulo começa por expor algumas práticas das aulas de matemática e apresenta depois os resultados obtidos de cada um dos alunos participantes, constituídos casos neste estudo.

Os resultados que se apresentam relativos às práticas de sala de aula têm como principal fonte o diário de campo. Pode acontecer ainda nesta parte de apresentação dos resultados, as práticas de sala de aula, que alguns se tenham obtido das entrevistas.

8.1. Práticas de sala de aula

O que se apresenta relativamente às práticas de sala de aula tem origem no Diário de Campo (DC). Assim, nesta secção não se considera necessário estar a referenciar as fontes das informações, a não ser que apareçam informações provenientes de entrevistas. Nesse caso indicar-se-á qual a entrevista.

Os alunos movimentavam-se com autonomia na organização do trabalho diário. Por exemplo, no início de um dia, logo que chegavam à sala os alunos tratavam de distribuir o material de trabalho pelas mesas e preparavam-se para trabalhar, mesmo que a professora ainda não estivesse presente. Estas tarefas organizativas eram assumidas e geridas pelos alunos. Em certos aspetos a professora concedia aos alunos a possibilidade de agendamento e condução de atividades propostas pelos próprios.

As mesas de trabalho dos alunos estavam dispostas na sala em quatro grupos de seis lugares, pelo que os alunos sempre se sentaram em grupo, ou seja, em torno de uma mesa. Ao longo do período de observação alguns alunos, poucos, nunca mudaram de lugar. Durante o primeiro e segundo período do 3.º ano, de acordo com o que foi observado, o Ricardo e a Madalena mantiveram-se sempre nos mesmos lugares. A Isabel e o Daniel passaram por outros lugares. Ainda assim, pode-se considerar que a disposição dos alunos era estável. Pontualmente, para alguns trabalhos específicos, eram formados grupos diferentes.

Foram observadas situações de trabalho individual e em grupo. Também foi observada diversidade de atividades a ocorrerem simultaneamente, isto é, nem todos os alunos realizavam o mesmo trabalho ao mesmo tempo. Assim ocorria tanto em atividades de trabalho individual como em grupo, mas sobretudo com os alunos com necessidades educativas especiais.

O ambiente observado em trabalho individual era geralmente silencioso, mantido por vezes sob alguma tensão, mas geralmente com descontração. A participação oral em atividades que envolvessem todos os alunos era geralmente feita sem atropelos do respeito pela intervenção de cada um. A gestão das intervenções era tarefa da professora. Um número significativo de alunos, mas não a maioria, mostrava-se bastante interventivo, participando com à vontade e sentido de oportunidade. Em atividades de discussão de trabalhos desenvolvidos e respetivos resultados, os alunos, com espontaneidade, mostravam capacidade de expor e ouvir. Foi possível reconhecer já institucionalizado entre os alunos um tipo de discurso pautado mais pelo questionamento do que pela apreciação meramente opinativa. Com alguma frequência a professora incentivava e concedia aos alunos o poder de validar afirmações com base na argumentação.

8.1.1. Rotinas

A agenda do trabalho desenvolvido ao longo de uma semana tinha a disposição de um horário, pelo que os alunos sabiam com antecedência os momentos e o tipo de trabalho que realizariam ao longo da semana. Mas para além disso, algumas rotinas sobressaíam da normal atividade de ensino e aprendizagem da matemática.

- O “Número do dia” era a designação de uma rotina diária, realizada no início de cada dia, que consistia na enunciação de expressões numéricas ou designações que representassem ou caracterizassem o número do dia do mês. Tinha como objetivo o desenvolvimento do cálculo mental.
- Outra rotina significativa, semanal, era a discussão da resolução de um problema de matemática, levado pelos alunos para ser resolvido no fim-de-semana. Tratava-se de um problema cuja resolução matemática estava orientada mais para os processos ou estratégias do que para o cálculo. O objetivo era o desenvolvimento de capacidades de resolução de problemas, de raciocínio, de comunicação e outras associadas.
- Também com um caráter rotineiro, embora sem periodicidade definida, era o momento de treino coletivo[18] baseado na resolução de *word-problems* ditados pela professora, que passava posteriormente aos alunos a oportunidade de formulação. Eram treinados procedimentos algorítmicos ou de resolução de problemas tipo, que envolvessem algum conceito ou processo em particular, por exemplo, problemas que envolviam a determinação de divisores.

[18] Diz-se aqui “treino coletivo” na medida em que, sendo uma atividade de treino, envolvia a participação dos alunos na discussão / correção dos procedimentos.

A rotina do Número do dia foi o alvo mais frequente das observações das aulas e por meio dela foi possível identificar caraterísticas e conhecimentos dos alunos referentes ao cálculo. O protocolo seguido na realização da atividade Número do dia era invariável: a professora escrevia de cima para baixo, no extremo direito do quadro, as expressões ditadas pelos alunos, questionando-os sobre a estratégia de cálculo seguida, devolvendo-lhes a palavra se era necessário corrigir, e incentivando a participação de alunos menos interventivos; por vezes provocava e levava os alunos para novas expressões ou estratégias que correspondiam a novos conhecimentos sobre os números e as operações; a atividade cessava quando não havia mais espaço para escrever. Em geral os alunos tinham a liberdade de escolher qualquer tipo de expressão mas, por vezes, a professora estabelecia uma condição ou pedia aos alunos que a estabelecessem; por exemplo: hoje dizemos só quocientes ou hoje só usamos 'números partidos' (expressão usada para designar fracionários expressos na forma de decimal – dízimas finitas). Além de expressões numéricas, os alunos podiam ajuizar sobre a paridade, ou se era primo, triangular, quadrado, expressá-lo em numeração romana, etc.

A discussão semanal da resolução de um problema de matemática levado pelos alunos para ser resolvido no fim-de-semana era uma atividade que privilegiava o desenvolvimento da comunicação matemática, da capacidade de expor e ouvir ideias, raciocínios, de representar, de argumentar, de questionar,… A atividade começava pela exposição de uma resolução, de algum aluno que se voluntariava ou era nomeado pela professora. Seguia-se o questionamento por parte dos colegas até que o processo de resolução fosse compreendido. Se o autor não conseguisse justificar o processo seguido era pedido a outro aluno para apresentar uma resolução parecida (que ajudasse a compreender a anterior) ou diferente. O que sobressaía da observação destes momentos era a grande capacidade de questionamento de alguns alunos que não deixavam de querer saber o 'porquê' e 'para quê' dos processos seguidos pelos colegas.

O momento de treino coletivo não era uma atividade que acontecesse com uma periodicidade semanal ou mensal estabelecida, mas era uma atividade frequente e que, pela sua própria finalidade, o treino, e por ser realizada coletivamente, institucionalizava as práticas valorizadas pela professora. O protocolo era simples: era ditado oralmente um problema, um aluno no quadro e os restantes no lugar registavam apenas os dados numéricos, resolviam e escreviam uma resposta completa (adequada ao contexto formulado). O resultado da resolução feita no quadro era validado pelos colegas e servia de exemplo. Normalmente era a professora que começava a ditar os problemas, mas posteriormente passava a vez de formulação aos alunos. Na primeira observação de uma destas atividades, no primeiro período do 3.º ano, eram ditados problemas envolvendo uma subtração com números na ordem das dezenas ou centenas de milhar. Quando a professora passou a vez de formulação aos alunos pediu que se formulassem problemas com *contas* difíceis. Nesta situação, para os alunos, subtrações difíceis eram aquelas em que o aditivo possuía, em algumas ordens, algarismos de menor valor que os correspondentes no subtrativo. Nem todos os alunos conseguiam satisfazer o pedido. Na última observação feita a uma atividade deste tipo, no primeiro período do 4.º ano, estava em causa a resolução de problemas cujo objetivo visava a determinação de divisores comuns a dois números ou respetivo máximo divisor comum. Quando foi passada aos alunos a formulação do problema era a professora que escolhia os números que seriam dados no problema.

8.1.2. Processos de cálculo

Na última semana de outubro de 2013, 1.º período do 3.º ano, os alunos trabalhavam em grupo na determinação do seu tempo de vida em minutos e no número de pulsações do coração no mesmo período. Os resultados ultrapassavam a meta de um milhão que está fixada pelo currículo para ordem de grandeza dos números em estudo no início do 3.º ano, mas a professora considerou que os alunos podiam avançar até às centenas de milhão, tendo em conta o contexto e o facto de estarem a trabalhar numa atividade exploratória, em grupo, havendo em cada grupo alunos capazes de lidar com o conhecimento necessário.

Para as operações de adição e subtração usavam os algoritmos comuns, mas para as multiplicações recorriam a processos alternativos: tabelas de razão (recorrendo à relação escalar), decomposição dos fatores e posterior recurso às propriedades comutativa, associativa ou distributiva em relação à adição. Por exemplo, para determinar quantos minutos tem um ano, usar as propriedades de isomorfismo da função linear é partir do conhecimento que um dia tem 1440 minutos e calcular passo a passo, com multiplicações simples (por 2, 5 ou 10) o número de minutos em 5 dias, em 10 dias em 20 dias… em 100 e 200 dias, adicionando depois o necessário para obter o número de minutos em 365 dias. Usar a decomposição dos fatores e a propriedade associativa foi o que fez um dos grupos de trabalho para calcular o número de pulsações numa hora: primeiro estabeleceram 70 como o número de pulsações por minuto, depois decompuseram o produto 60×70 em 6×10×7×10 seguido de 6×7×10×10 usando o conhecimento que já tinha de que, por exemplo, 60=6×10. O recurso à decomposição de um dos fatores e à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição era um processo usado frequentemente em cálculos de produtos em que um do fatores tinha dois algarismos: 24×4200 podia ser feito decompondo 24 em 10+10+4 e calculando 10×4200+10×4200+4×4200.

Na resolução de problemas envolvendo a divisão, os alunos, nesta altura, 1.º período do 3.º ano, usavam a adição ou a multiplicação como acima já se expôs. Por exemplo, na resolução de um problema em que era necessário determinar o número de tomates necessários para ter 96 fatias de tomate sabendo que cada tomate era cortado em 5 fatias, houve alunos que resolveram o problema aditivamente, simplesmente adicionando de 5 em 5 até concluir que eram necessários 20 tomates. Outros alunos recorreram à multiplicação, verificando, por tentativa e erro ou por conhecimento de facto, que dez tomates teriam 10×5 fatias, outros dez tomates mais 50 fatias, etc. Houve quem elaborasse uma tabela de razão semelhante à da Figura 20, na qual se pode ver que o número de fatias por tomate foi sendo duplicado até chegar a 80 fatias, tendo-se adicionado mais dez fatias e o correspondente em tomates (2) e, finalmente mais 5 fatias. Um aluno, o Daniel, que usou este processo, respondeu primeiro que eram precisos dezanove tomates, mas percebeu que lhe faltava uma fatia e corrigiu para 20.

		×2	×2	×2	×2	+2	+1
N.º de tomates	1	2	4	8	16	18	19
N.º de fatias	5	10	20	40	80	90	95
		×2	×2	×2	×2	+10	+5

Figura 20: Exemplo de tabela de razão para cálculo multiplicativo.

Mas, de facto, nem todos os alunos mostravam a capacidade para usar estes processos mais elaborados para efetuar este cálculo. Um número bastante significativo de alunos usava processos aditivos.

No 2.º e 3.º período do 3.º ano os alunos já usavam o algoritmo da multiplicação. A aprendizagem do algoritmo da divisão com divisores de um só algarismo foi iniciada no 3.º ano e a divisão com números de dois e três algarismos no divisor foi iniciada no princípio do 4.º ano.

A atividade “Número do dia” permitia observar processos de cálculo mental. No primeiro período do 3.º ano, era frequente ver os alunos usar operadores partitivos e multiplicativos como dobro-metade, terça parte-triplo, etc. Quando um aluno dizia, por exemplo para o dia 14, que 14 era o dobro de 7, a professora registava no quadro 2×7. Se a afirmação fosse 14 é metade de 28, a professora registava $^{1}/_{2}\times 28 = 28\div 2$. Deste modo, as expressões numéricas com números racionais representados na forma de fração começaram a ser veiculados nas aulas desde muito cedo neste contexto específico.

A multiplicação e a divisão por 10, 100 e 1000 já era conhecida no final do 3.º ano. Para um dia 12 podiam aparecer as expressões “a décima parte de 120” e eram registadas como $120\div 10 = {}^{1}/_{10}\times 120$. No primeiro período do 4.º ano já os alunos usavam a multiplicação por uma décima, uma centésima e uma milésima (racionais representados em fração e em dízima) como operações equivalentes à divisão por dez, cem e mil.

Nas atividades de cálculo mental observadas no início do 4.º ano, se um aluno dissesse que 16 era $^{1}/_{5}$ de oitenta, a professora registava $^{1}/_{5}\times 80=0{,}2\times 80$.

Acontecia quase sistematicamente, depois de alguém dizer uma expressão como acima referida, produto com uma fração unitária e um número natural, surgir uma sequência de expressões deduzidas da primeira.

Por exemplo, num dia 12, depois de um aluno dizer que 12 é 1/3 de 36, outros seguiam dizendo que 12 era 1/4 de 48, 1/5 de 60, 1/6 de 72, etc. A estratégia usada pelos alunos para compor esta sequência era adicionar 1 ao denominador do primeiro fator e doze ao segundo fator, ou seja, se

$12 = \frac{1}{4} \times 48$ então $12 = \frac{1}{4+1} \times (48 + 12)$.

Generalizando, para qualquer expressão do tipo $a = \frac{1}{c} \times b$ surgiam depois outras resultantes da anterior porque $a = \frac{1}{c} \times b = \frac{1}{c+1} \times (b + a)$.

O mesmo se passava com a divisão. Num dia 11, por exemplo, o Guilherme disse que 11 era 143÷13 e, de seguida, outros alunos avançaram com outras expressões deduzidas da primeira, recorrendo a uma estratégia aditiva: 11=154÷14, 11=165÷15,… isto é, adicionando 11 ao dividendo e 1 ao divisor iam construindo expressões equivalentes a 11.

Matematicamente, adicionar 1 a ***c*** (denominador da fração) e ***a*** a ***b*** (o segundo fator) na expressão $a={}^{1}/_{c}\times b$ corresponde a adicionar ***a*** ao dividendo e 1 ao divisor, pois a fração na primeira expressão tem um sentido de operador partitivo.

A estratégia acima referida manifestava-se como um hábito e ocorreu quase todos os dias observados, alargando-se ao longo do tempo o número de alunos capazes de a usar. Repare-se que essa estratégia pode ser apropriada por imitação por alunos menos competentes na estrutura multiplicativa, usando simplesmente a adição na regularidade observada e não compreendendo realmente as relações multiplicativas em causa. Isto significa que poucos alunos eram capazes de pensar que 12 é um quinto de 60 porque 60 é 12×5, mas depois de surgir esta expressão numérica, alunos com menor destreza no uso da multiplicação eram capazes de dizer que 12 é igual um sexto de 72 e explicar que tinham encontrado a expressão numérica adicionando 1 ao denominador e 12 a 60. Esta justificação era maioritariamente aceite sem que fosse pedida uma justificação baseada na relação multiplicativa entre o denominador e o segundo fator.

Tal estratégia está relacionada com o processo acima já referido (o uso de tabelas de razão: Figura 20, ver na pág. 97) para efetuar multiplicações ou divisões antes da aprendizagem dos algoritmos. Mas neste caso, nesta descoberta de expressões numéricas equivalentes ao número do dia, este número manifesta-se como a constante de proporcionalidade, como relação funcional. No entanto, a exploração desta relação entre o uso de tabelas de razão para resolver multiplicações (pela relação escalar), e a estratégia para encontrar expressões numéricas equivalentes (relação funcional) não foi observada.

A verdade é que os alunos que, numa primeira fase, viam o dobro como uma adição de duas parcelas iguais, conseguiam usar a tabela (Figura 20) de um modo aditivo e não multiplicativo. Um aluno que usava sistematicamente a adição para multiplicar era o Ricardo que, explicitamente

(Entrevista Livre, 1.ª parte,), assumiu preferir adicionar quando a multiplicação envolvia fatores de baixo valor.

8.1.3. Particularidades da intervenção dos alunos no Número do dia

A intervenção dos alunos na rotina do Número do dia, de acordo com o observado, era visivelmente desigual, isto é, havia alunos ou alunas que participavam mais que outros. Havia quem só participasse apenas por provocação da professora, e outros que pediam a palavra repetidamente e participavam com grande frequência. Entre os alunos constituídos casos neste estudo, o Daniel era muito ativo, pedindo sistematicamente a palavra. A Madalena, que manifestava grande competência de cálculo sempre que intervinha, participava todos os dias mas fazia-o poucas vezes num mesmo dia. O Ricardo participava quase todos os dias intervindo pelo menos uma vez. A Isabel participava menos vezes e, em muitas ocasiões, por incentivo da professora. Entretanto foi possível observar certas particularidades que caracterizam e diferenciam os alunos quanto ao conteúdo da sua intervenção.

O Daniel ditava expressões bastante diversas e mostrava capacidades raras, como expressar o número do dia como produto de dois números racionais não inteiros, um na forma de dízima e outro na forma de fração própria não unitária. Exemplo de um produto de dois racionais não inteiros aconteceu no dia 9 de outubro, tendo dito 2/3 de 13,5 explicou "fui à metade de nove, é quatro e meio e depois ao nove juntei mais 4,5". Também se observou a afirmação de uma generalização. Aconteceu no dia 25 de março. Disse "eu descobri que um número quadrado mais um número ímpar dá um número quadrado", e mostra que, colocando em duas colunas, lado a lado, a lista dos quadrados perfeitos e dos ímpares (início em 3), a soma de cada par (1,3), (4,5), (9,7), (16,9) resulta num quadrado perfeito.

A Madalena mostrava-se capaz de produzir qualquer tipo de expressões, mas o seu costume era dizer expressões com mais de uma operação: no dia 19 de maio disse $40÷2-1$ e $6×5−11$; no dia 20 de novembro, "Abrir parênteses, um mais dois mais três mais quatro, fechar parênteses, vezes dois"; ou também usar expressões como "ao quadrado" ou "ao cubo", por exemplo,"3 ao cubo menos 5".

O Ricardo tinha o hábito de propor expressões de adição e/ou subtração usando designações como dezena, dúzia e quarteirão. Por exemplo, no dia 9 de outubro disse "meia dúzia mais metade de meia dúzia", num dia 27 "uma dúzia mais uma dúzia mais meia de meia dúzia" ou "é um quarteirão" no dia 25 de março. Por vezes também era capaz de participar nas sequências de propostas de produtos envolvendo frações unitárias. Por exemplo, no dia16 de outubro depois de alguém dizer que 16 é igual a 1/10 de 160, o Ricardo avançou com 1/5 de 80 e explicou "porque se é metade de 10 é metade de 160, é 80+80". Esta explicação é confusa pela omissão de dados fundamentais. Esta é uma característica do discurso do Ricardo quando explica os seus raciocínios.

O que ele quer dizer é: em vez de um décimo de 160, digo um quinto de 80, porque 5 é metade de 10 e 80 é metade de 160. O que é curioso nesta sua proposta, é que ele não segue a estratégia aditiva dos seus colegas [se $a = {}^{1}/_{n} \times b$ então a = ${}^{1}/_{n+1} \times (b+a)$], antes recorre a uma relação multiplicativa, a metade. Contudo, como se pode ver no final da sua explicação, usa a adição para explicar a relação metade/dobro.

A Isabel exprimia-se sobretudo com adições e subtrações. De entre os dias observados, aquele em que mais participou foi a 14 de outubro, para o qual os alunos tinham instituído a regra “só adições e só números inteiros”. Disse: 12+2; 5+5+2+2; 2+2+2+2+6; 4+4+6. No dia 19 de maio, em que a regra instituída obrigava a expressões envolvendo só três números, interveio duas vezes com adições e subtrações, mas das duas vezes teve de se corrigir: primeiro com 14+3+1, corrigindo para 15+3+1, depois com 14+2-1, corrigindo para 14+6-1. Extraordinariamente, foi observado no dia 16 de outubro em que interveio dizendo ${}^{1}/_{8}$ de 128 e explicou que tinha feito a partir de ${}^{1}/_{7}$ de 112, dito anteriormente por outro aluno, tendo adicionado 1 a 7 e 16 a 112.

8.2. O caso do Daniel

8.2.1. Características pessoais

Com quem vivia e estudava

O Daniel vivia com o pai, a mãe e um irmão mais novo com 2 anos de idade (informação dada em março de 2014). Quando saía da escola ia primeiro para casa da avó. A avó tinha sido professora e na altura das entrevistas estava reformada e era explicadora. As colegas Clarisse e Isabel frequentavam a explicação da avó do Daniel. Normalmente fazia os trabalhos sozinho, em casa da avó e esta ajudava-o quando ele tinha alguma dúvida e lhe pedia ajuda.

O gosto pela Matemática

Gostava muito de Matemática, mais do que de Português, embora, como disse no início do 4.º ano, tenha tido no ano anterior melhor nota a Português do que a Matemática, nomeadamente 100% a Português e 98% a Matemática.

Justificava o seu gosto pela Matemática porque tanto o pai como a avó gostavam muito de Matemática. O pai também o ajudava na Matemática. “Ele está por exemplo sentado no sofá a ver televisão, eu pergunto-lhe do nada, ele responde instantaneamente, e quando ele faz isso eu fico impressionado e tento fazer como ele”.

Os Números e Operações eram o seu tema preferido e, embora não detestasse, não era grande apreciador dos problemas que envolviam Geometria ou Organização e Tratamento de Dados.

Na entrevista Livre, 1.ª parte, feita no 3.º ano manifestava preferência pelos cálculos, mas no 4.º ano já dizia que gostava mais de resolver problemas. Só não gostava muito de explicar como tinha pensado na resolução do problema porque, dizia, “às vezes eu faço tantas coisas e pronto, que às vezes nem consigo explicar muito bem como é que fiz.” (Livre, 1.ª parte)[19]

O desempenho em Matemática

Em termos de desempenho escolar, O Daniel colocava a Madalena no lugar de melhor aluna na resolução de problemas, seguida da Rita e do Miguel. Considerava que a Francisca e o Guilherme também eram bons a resolver problemas.

Entre os alunos que não eram bons, o Daniel situava a Isabel entre os alunos com mais dificuldade, porque se enganava muito nas *contas*. A si mesmo colocava-se ao lado da Madalena no desempenho a resolver problemas.

[19] Livre, 1.ª parte” significa que a afirmação é referente à entrevista que não esteve associada a uma tarefa específica, entrevista essa subdividida em 3 partes.

Questionado sobre as aprendizagens mais importantes que já tinha feito, o Daniel mostrava dificuldade em enumerar dada a quantidade. “Eu já aprendi…muitas coisas, e agora de cabeça…são tantas coisas que eu me estou a lembrar… algoritmos… contas de somar, frações… já aprendemos tanta coisa!” (Livre, 1.ª parte)

A memória de problemas

O que gostava num problema era que fosse difícil. Gostava de problemas difíceis, de raciocínio, “Gosto de… puxar pela cabeça” (Livre, 1.ª parte) e também gostava de problemas que exigiam muitos cálculos.

Dizia que não pensava em outros problemas parecidos quando estava a resolver um problema difícil, apenas coisas que já aprendera, tal como os procedimentos para fazer os cálculos e outras coisas básicas.

Lembrava-se de ter feito (no 3.º ano) um problema complicado porque tinha números muito grandes envolvendo uma divisão, operação cujo algoritmo ainda não tinham aprendido.

Lembrava-se mais ou menos do enunciado. Não se lembrava era dos números, mas disse que era mais ou menos assim: “Era preciso transportar 1 047 556 pessoas. Os aviões que havia para transportar as pessoas eram os Boing 502 que transportavam 427 pessoas. Quantos aviões foram precisos?” (Livre, 2.ª parte). Explicou que usaram uma tabela (de razão) para resolverem esse problema.

O último problema que tinha gostado de resolver estava no livro de fichas. Gostou porque tinha muitos cálculos. Disse que não se lembrava bem do enunciado, mas conseguiu ditar uma versão que só diferia (ligeiramente) nos valores dados.

> Um agricultor recolheu num quintal 438 Kg de batatas e noutro 689 Kg. E depois, para consumo dele, guardou 243 Kg. O resto vendeu em sacos de 15 Kg. Cada saco custava 8 €. Quanto é que ele ganhou na venda?

Recordava também um que tinham estado a resolver na aula nesse mesmo dia: “Numa escola de 450 alunos o número de raparigas é o quádruplo do número de rapazes. Quantos são os rapazes e quantas são as raparigas?” Explicou rapidamente a resolução, recorrendo a um esquema. Desenhou quatro quadrados dizendo “Se as raparigas são o quádruplo vai haver quatro grupos de raparigas”. Desenhou mais um grupo dizendo “e rapazes há um grupo”. Posto isto dividiu por cinco e colocou o quociente em cada um dos quadrados. Concluiu achando o produto deste quociente por 4 e identificando as respostas às perguntas.

À pergunta se era capaz de inventar um problema parecido, respondeu que sim, mas na verdade o que fez foi reproduzir um problema que estava no manual escolar, desta vez lembrando-se exatamente dos números presentes no original. Disse “estava a fazer ali um que era muito complicado que não conseguia encontrar a resposta". Ao mesmo tempo que escreve o enunciado vai explicando as semelhanças:

> Numa garagem havia automóveis – por exemplo, imaginamos que são os rapazes – e motas – que são as raparigas. Nessa garagem havia setenta rodas. As rodas dos automóveis… Quer dizer… Os automóveis tinham o sêxtuplo das rodas das motas. Quantos automóveis havia? E quantas motas?

O facto de ter simplesmente reproduzido um problema presente no manual quando se lhe pediu que inventasse só foi percebido mais tarde pelo investigador, pelo que não é possível saber por que o fez. No entanto é de notar que este problema é colocado por ele por não ter sido capaz de o resolver. Ou seja, o problema não é original, mas parece manter o caráter de novidade enquanto não for resolvido.

A formulação de problemas

Segundo o Daniel, inventar problemas não era uma atividade recente (no 3.º ano) pois já inventam problemas desde o primeiro ano. Considerava que a formulação de problemas servia "para ficarem com mais conhecimento das coisas, ter mais… desenvolver mais um bocadinho cada dia… e é bom!"

Considerava-se um bom aluno a inventar problemas e gostava tanto de inventar problemas livremente como de inventar a partir de informação que lhe fosse dada. Mas distinguia dois tipos de formulação de problemas: a formulação de problemas em que já se sabe a resposta e a formulação de problemas cuja resposta não é conhecida. Destes últimos é que ele gostava pois são mais difíceis e "fazem os neurónios trabalhar mais".

Perante a proposta de que invente um problema de que goste, escreveu:

> O João estava numa escola com 379 alunos. Haviam 12 salas. Em cada 3 salas era um ano. As turmas do 2.º ano e do 4.º ano, que são 3 cada, eram o dobro das turmas do 1.º ano e do 3.º ano. Em conjunto, quantos alunos havia no 4.º ano e no 2.º ano? E no 3.º ano e no 1.º ano? (Entrevista Livre, 3.ª parte)

Explicou que inventou este problema por ser parecido com um que resolveram recentemente na aula e do qual gostou muito. Mas quis fazê-lo mais difícil. É, de facto, semelhante ao das motas e carros, que acima referiu (Entrevista Livre, 2.ª parte, realizada 7 dias antes), na medida em que, sabendo-se um todo, existe uma parte que é um certo número de vezes maior que outra. A diferença entre este problema e o acima enunciado está nos dados que acrescenta, possivelmente com a intenção de acrescentar operações à resolução, de acordo com características dos problemas de que gosta. Este enunciado que escreveu contém afirmações contraditórias que tornam o problema impossível. O Daniel foi dando conta dessas questões, e tentou corrigi-las à medida que ia relendo e resolvendo o problema. Acontecia, porém, que algumas correções implicavam novas contradições. Acabou assim por não conseguir manter o modelo matemático que se pode subentender neste primeiro enunciado criado a partir do problema que o inspirou.

O modelo matemático básico que o Daniel quer manter é o que se pode enunciar pela existência de um total de alunos, repartidos em dois grupos, sendo um dos grupos constituído pelo dobro dos alunos do outro. A expressão matemática que coloca o problema em equação exibe duas operações, uma adição e uma multiplicação: $T = 2\times A+A$, sendo T o número total de alunos e A o número de alunos do grupo ao qual o contexto atribui menor número de elementos. É conhecido o número total de alunos (T) e a relação multiplicativa entre as duas partes do todo (×2). O que se pretende saber é A (número dos alunos do grupo menos representado no contexto) e 2A (número de alunos do grupo maior). Segundo a classificação de Greer (1992) esta pode ser considerada uma situação de Comparação multiplicativa em que se sabe o total e a relação escalar entre as duas partes. A resolução passa por reconhecer que sendo uma das partes o dobro da outra, então há três grupos iguais. É assim necessário efetuar a divisão do número total de alunos por três, identificando o número de alunos do grupo menor. Esta é uma divisão com sentido de partilha equitativa dado que se pretende saber quantos alunos possui cada grupo. Sabendo, pela divisão o valor de A, falta apenas saber o valor de 2A, o que pode ser conseguido pela duplicação de A (ou pela subtração de A a T).

A complexidade que o Daniel quer introduzir é decompor A, isto é, fazer com que o grupo A (e consequentemente o grupo 2A) seja composto por partes menores (as turmas), obrigando à realização de mais operações, característica inerente aos problemas de que gosta. Por fim, acaba perguntando pelo número de alunos, o que se pode entender como ainda outra decomposição da turma, mas que implica ser necessário dizer que era igual o número de alunos por turma. Há, portanto, no enunciado que inventou, condições que entram em conflito e que tornam o problema inconsistente.

1.ª – "Haviam[20] 12 salas. Em cada 3 salas era um ano."

> A consequência é que há 12 turmas, três turmas por ano de escolaridade, portanto, igual número de turmas.

2.ª A. – "As turmas do 2.º ano e do 4.º ano, que são 3 cada, . . ."

> Condiz com a 1ª condição: 3 turmas por ano.

2.ª B. – ". . . eram o dobro das turmas do 1.º ano e do 3.º ano."

[20] Grafia do aluno.

Contradiz a primeira. E, de acordo com a primeira, seriam 6 turmas, as quais sendo o dobro das restantes, as do 1.º e 3.º ano seriam, em conjunto, 3 turmas, resultando em 9 turmas e consequentemente 9 salas.

3.ª – "Em conjunto, quantos alunos havia no 4.º ano e no 2.º ano? E no 3.º ano e no 1.º ano?

Supõe, o enunciado não explicita, igual número de alunos por ano ou por turma.

Após a escrita, o enunciado é relido e o Daniel vai introduzindo correções.

Primeiro corrigiu o número total de alunos de 379 para 378 porque "não pode ser ímpar porque vai ter de ser o dobro e nós não podemos partir alunos ao meio". Na verdade estava a esquecer-se que o total de alunos é a soma do dobro de que fala com outro número que, se for ímpar, a soma resultará num número ímpar.

Numa segunda releitura, apercebe-se que, se é dito que o número de turmas por ano é o mesmo, não pode dizer que o número de turmas do 2.º e 4.º ano são o dobro das de 1.º e 3.º ano. Acrescenta nova correção: é o número de alunos que é o dobro. Faz ainda mais uma correção dizendo que o número de alunos por turma é o mesmo.

O enunciado reformulado ficou:

> O João estava numa escola com 378 alunos. Havia 12 salas. Em cada sala havia o mesmo número de alunos. Em cada 3 salas era um ano. As turmas do 2.º ano e do 4.º ano tinham o dobro dos alunos do primeiro ano e do 3.º ano. Em conjunto, quantos alunos havia no 4.º ano e no 2.º ano? E no 3.º ano e no 1.º ano?"

Quando começou a resolver o problema depara-se com as incompatibilidades das condições dadas e vai procurando corrigi-las. No entanto não consegue manter a estrutura e acaba por reduzir o enunciado a um problema mais simples.

Pode-se compreender a sua preocupação em estabelecer grupos iguais se tivermos em conta que pretende começar por dividir o número total de alunos pelas 12 turmas. É mesmo essa a operação que começa por fazer. O primeiro erro que detetou assim que fez a operação (378÷12), foi a existência de resto, e corrigiu-o com habilidade, subtraindo o resto ao dividendo. O número total de alunos passa para 372. Depois verifica que há contradição entre as condições: se há o mesmo número de turmas em cada ano, se as turmas têm o mesmo número de alunos, então não pode haver o dobro de alunos nuns anos em relação aos outros.

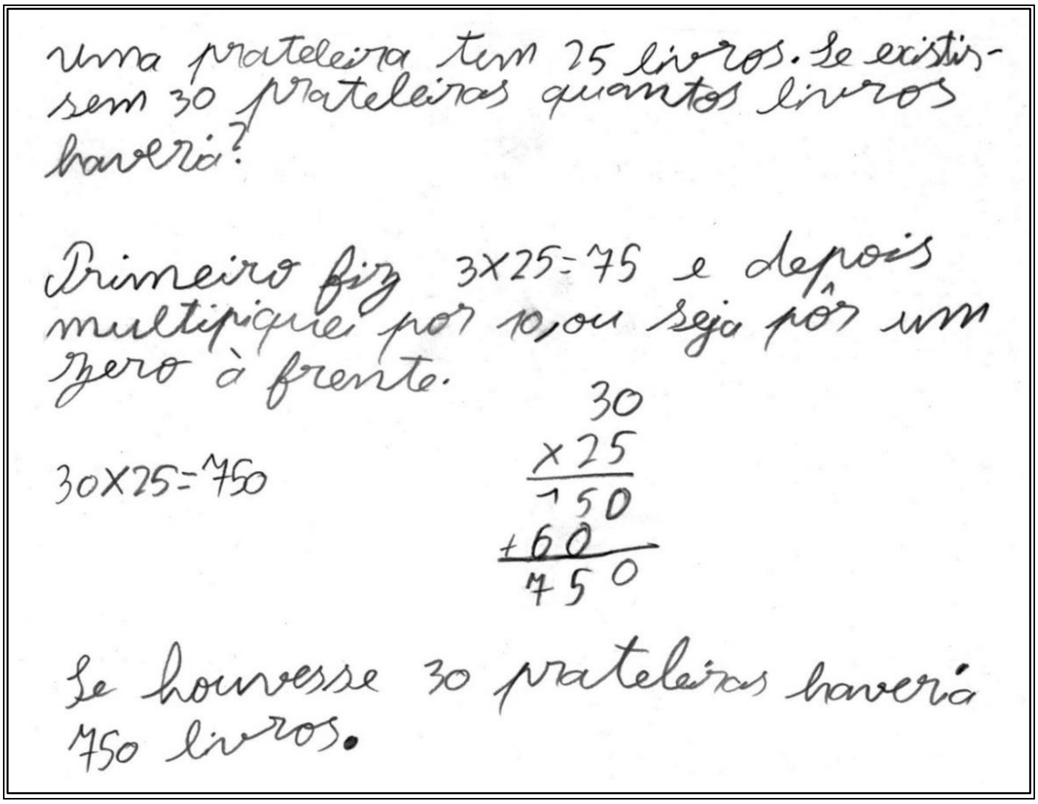
Interessa aqui salientar dois aspetos: o interesse em complexificar os problemas que conhece, e a resiliência na procura de uma reformulação que resulte. O primeiro aspeto pode ser tomado como uma das possíveis características do seu modo de formular problemas, ou seja, inventar problemas reformulando os que já conhece, tornando-os mais complexos.

8.2.2. A Tarefa “30×25”

A resolução da tarefa iniciou-se com todos os participantes presentes em simultâneo em torno de uma mesa numa sala própria onde normalmente se realizavam as entrevistas. Apesar de estarem todos juntos, a tarefa de formular o problema, de o escrever, para a expressão numérica dada foi feita individualmente. Quando acabavam de escrever voltavam para a sala e a entrevista (individual) foi feita posteriormente nesse mesmo dia. Naturalmente que, estando todos reunidos na mesma sala, antes de iniciar a resolução, conversaram uns com os outros. Essa conversa ficou registada em vídeo e nela foram significativas a intervenções sobre o gosto e a imaginação de cada um.

O Daniel destacou-se dos outros pela afirmação positiva do gosto na formulação de problemas. Confirmou mais adiante na entrevista este seu gosto, dizendo “gosto de inventar coisas”.

Disse, muito cedo, ainda não tinham começado a formular o problema, que já sabia o resultado. Explicou mais tarde a sua estratégia. Recorreu ao número trinta como multiplicador, triplicando vinte e cinco e multiplicando depois por dez. A Figura 21 mostra o problema que formulou e a sua explicação do processo de cálculo mental que usou para a resolução. A resolução da operação pelo algoritmo foi sugerida pelo investigador para que o Daniel mostrasse como o faria. Ele não mostrou qualquer hesitação ou dúvida na sua execução e afirmou depois “É muito fácil.”


Uma prateleira tem 25 livros. Se existis-
sem 30 prateleiras quantos livros
haverá?

Primeiro fiz 3×25=75 e depois
multipiquêi por 10, ou seja pôr um
zero à frente.

30×25=750

30
×25
150
+60
750

Se houvesse 30 prateleiras haverá
750 livros.

Figura 21: Resolução da tarefa "30×25" pelo Daniel.

Sobre a formulação do problema o Daniel disse que foi fácil e esclareceu que o fez por semelhança com outro que tinha formulado em aula:

INV. – Muito bem. Isso foi fácil ou difícil de inventar?

Daniel – Foi fácil. [sorrindo]

INV. – Foi fácil, está bem. E como é que te lembraste deste… Como é que inventaste…

Daniel – Como é que eu tive esta ideia?

INV. – Sim.

Daniel – Lembrei-me… acho que foi ontem… ou anteontem… quando estávamos na sala… a professora escreveu 3×4 no quadro e perguntou se conseguíamos inventar um problema. E eu pensei logo… pensei, 3 prateleiras, cada prateleira com 4 livros… três prateleiras quantos livros têm? É quase igual.

O problema que inventou enquadra-se na categoria de contextos com sentido Grupos iguais (Greer, 1992). Neste enunciado não está explícita, mas subentendida, uma condição essencial, que as prateleiras têm igual número de livros. É necessário assegurar que todas as 30 prateleiras têm 25 livros cada uma. É muito comum não explicitar este tipo de condições, por se considerar implícita, o que não deixa de ter a ver com a rotina na resolução ou na formulação de problemas. É verdade que em alguns contextos isso pode estar implícito, isto é, o próprio contexto supõe a condição e pode ser acessório torná-la explícita. Mas esta condição é importante porque é a que define claramente a quantidade intensiva (Schwartz, 1988) própria da multiplicação na tríade IEE'. Na altura em que esta entrevista foi realizada teria sido possível ao Daniel formular um problema de Produto de medidas (Vergnaud, 1983), nomeadamente envolvendo o cálculo de área de um retângulo, dado que este assunto tinha sido recentemente (4 dias antes) explorado.

8.2.3. A Tarefa "Caixas de Pastéis"

O Daniel lê o enunciado sem hesitações (Figura 15, ver na pág. 83). Faz uma leitura linha a linha dos dados dispostos em tabela, isto é, lê primeiro todos os números dispostos na linha do número de caixas e depois os dispostos na linha do número de pastéis. Logo de seguida, sem demoras e por sua iniciativa, continua em voz alta a interpretar a tabela, mas agora explicitando a relação entre caixas e pastéis:

Daniel – Então é assim. Aqui o quatro é… ah… o quatro… por exemplo, quatro caixas têm dezasseis pastéis embalados. Oito caixas têm trinta e dois pastéis embalados e dezasseis caixas têm sessenta e quatro pastéis embalados. Então,… vou perguntar quantos pastéis há em cada caixa. [para e escreve a pergunta] Então eu sei que… quatro… vezes quatro dá dezasseis [para e escreve 4×4=16]. Ou seja, eu sei que quatro caixas são dezasseis pastéis, portanto, vou fazer dezasseis a dividir por quatro [para e escreve 16÷4=4]. Que dá quatro, como deu aqui. Então se… em quatro… o número de pastéis embalados deu quatro… se isto são os pastéis e isto são as caixas, e deram quatro pastéis… Há quatro pastéis em cada caixa [para e escreve a resposta à pergunta]. E o mesmo se repete com o oito e o trinta e dois, e o dezasseis e o sessenta e quatro.

INV. – Tens a certeza?

Daniel – Sim, porque oito vezes quatro é trinta e dois, como aqui foi quatro vezes quatro que é dezasseis. E aqui dezasseis vezes quatro, como foi no quatro vezes quatro que deu dezasseis e no oito vezes quatro que deu trinta e dois, dá sessenta e quatro. E depois eu tenho que fazer trinta e dois a dividir por oito, que dá… dá oito. Trinta e dois… não, dá quatro! Trinta e dois a dividir por oito dá quatro. Como deu aqui. E sessenta e quatro a dividir por dezasseis dá quatro, como também deu aqui. Portanto em cada situação havia quatro pastéis em cada caixa.

A transcrição acima mostra claramente que ele procurou em primeiro lugar a relação entre o número de caixas e o número de pastéis nelas contido. Pode-se com segurança afirmar, com base nas suas primeiras palavras, que o Daniel deu primazia à interpretação da relação funcional, em vez de uma leitura horizontal dos dados, a qual lhe permitiria identificar a relação escalar entre dois números dentro da mesma grandeza, a do número de caixas ou a do número de pastéis. É assim levado à identificação da relação funcional "quatro pastéis por caixa" que transforma o número de caixas em número de pastéis. A procura desta relação esteve na origem da primeira pergunta que fez: "vou perguntar quantos pastéis há em cada caixa." Mais adiante ele afirma "o mesmo se repete com o oito e o trinta e dois, e o dezasseis e o sessenta e quatro" mostrando assim que identificou o caráter constante da relação multiplicativa entre cada número de caixas e o correspondente número de pastéis. A primeira leitura que fez da tabela conduz o Daniel à descoberta da constante de proporcionalidade. A explicitação é rica em pormenores e o trecho "vou perguntar quantos pastéis há em cada caixa. Então eu sei que… quatro… vezes quatro dá dezasseis" permite afirmar que o conhecimento da relação multiplicativa "vezes quatro" é indissociável da pergunta sobre o número de pastéis por caixa. É plausível afirmar que a pergunta "quantos pastéis há em cada caixa?" visa a explicitação de uma informação implícita no enunciado, que é antevista pelo Daniel, mais do que responder ao pedido da tarefa, de formular uma pergunta passível de ser respondida por meio de uma multiplicação. É também observável no discurso do Daniel o domínio de factos numéricos inerentes ao conhecimento da tabuada do quatro. À afirmação "eu sei que… quatro… vezes quatro dá dezasseis" segue-se "Sim, porque oito vezes quatro é trinta e dois, como aqui foi quatro vezes quatro que é dezasseis. E aqui dezasseis vezes quatro, como foi no quatro vezes quatro que deu dezasseis e no oito vezes quatro que deu trinta e dois, dá sessenta e quatro.”

A estreita ligação observada entre conhecimento matemático (que ele manifestou ao interpretar os dados fornecidos no enunciado) e a pergunta formulada foi esclarecida explicitamente por ele mais adiante no diálogo:

INV. – Quando fizeste a pergunta já sabias a resposta?

Daniel – Já estava mais ou menos com uma ideia na cabeça. Mas ainda não sabia por completo.

Tendo feito a pergunta “quantos pastéis há em cada caixa?” o Daniel registou ao resolver duas operações: $4 \times 4 = 16$ e $16 \div 4 = 4$. Reconheceu depois que a resposta à sua pergunta é dada mais propriamente pela divisão e que, portanto, não respondeu ao pedido feito na tarefa. Percebeu que tem de fazer uma nova pergunta mas não foi com facilidade que resolveu tal pedido. A sua primeira reação foi explicitar novamente que o número de pastéis é obtido pela multiplicação do número de caixas por quatro, sem formular explicitamente a pergunta: “Quatro vezes oito é trinta e dois. Quatro vezes dezasseis é sessenta e quatro.” Após alguma insistência reage positivamente:

Daniel – Ahh, já sei, já sei.

INV. – Diz lá o que é que tu já sabes.

Daniel – Eu já sei que em cada caixa há quatro pastéis.

INV. – *Okay*.

Daniel – E que em quatro caixas há dezasseis pastéis, em oito há trinta e dois e em dezasseis há sessenta e quatro.

INV. – *Okay*, então qual é que podia ser a pergunta?

Daniel – A pergunta que eu agora pensei que podia ser resolvida por uma multiplicação podia ser “Em 32 caixas, quantos pastéis estavam embalados?”

Mais uma vez a pergunta surgiu depois da explicitação da relação entre o número de caixas e o número de pastéis. O que não é explícito é o motivo para a escolha do número trinta e dois. Esta questão não lhe foi colocada e, portanto, não há uma resposta clara do Daniel. No entanto isso é dado a entender quando explicou o processo de resolução baseado na relação escalar, quando, a certa altura, diz poder obter o número de pastéis em trinta e duas caixas duplicando o número de pastéis em dezasseis caixas. Ele diz poder resolver dessa maneira quando reconhece, depois de alguma insistência e de se lhe pedir que observe atentamente a tabela, que cada número de caixas ou cada número de pastéis que aparece é o dobro do anterior. Contudo, este processo de resolução não surge com facilidade. O Daniel não recorreu a ele para responder à pergunta que fez e, apesar da insistência, afirmou mais do que uma vez não ter outra maneira de resolver o problema senão multiplicando trinta e dois por quatro, necessitando sempre de saber o número de pastéis por caixa. Apesar do número trinta e dois e se adequar à razão de progressão da sequência dos números de caixas, a sua escolha não foi feita tendo em conta a antecipação do processo (possível) de resolução, ou seja, a duplicação do número de pastéis por isomorfismo da duplicação do número de caixas. Dito de outro modo, o Daniel não escolheu o número trinta e dois para figurar na sua pergunta em função do processo de resolução do problema. Ele sabia que trinta e dois era o dobro de dezasseis; sabia que entre dois números consecutivos na tabela havia uma relação de dobro mas não usou esse conhecimento como base para formular a pergunta. O conhecimento que estava por detrás da sua segunda pergunta, e que servia o processo de resolução, continuou a ser a relação funcional que o Daniel descortinou em primeiro lugar. Esta afirmação é significativa tanto mais quanto o Daniel afirmou anteriormente que, quando formulou a primeira pergunta tinha uma ideia da resolução. No entanto, na segunda pergunta, a escolha de um número dobro do anterior não foi crucial para a resolução pois ele não faz uso da relação escalar. É muito provável que o Daniel soubesse responder ao tipo de pergunta que formulou qualquer que tivesse sido o número escolhido, atendendo a que usaria o mesmo processo, o recurso à constante de proporcionalidade.

Para efetuar a multiplicação 4×32 o Daniel não recorreu à tradicional disposição do algoritmo, mas, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, decompõe 32 em 30+2, indicando horizontalmente primeiro 4×32=, sem escrever o resultado, por baixo 4×30=120, ainda por baixo 4×2=8 e, depois de englobar 120 e 8 com uma chaveta, escreveu finalmente 128 à frente de 4×32=, a primeira indicação.

8.2.4. A Tarefa: "3×6=18"

O Daniel formula os problemas para cada uma das expressões numéricas apresentadas (3×6=?; ?×6=18 e 3×?=18) sem qualquer tipo de hesitação. Depois de ter observado os diferentes cartões onde estavam as expressões numéricas começou a baralhá-los para selecionar um ao acaso, como se fosse indiferente começar por uma ou por outra. Esta sua atitude confirma-se mais adiante, pois quando escolhe a segunda expressão, diz "Este é basicamente igual a este porque aqui já temos a resposta que é dezoito." Esta afirmação é reiterada mais adiante quando escolheu a terceira expressão para formular o problema.

Questionado se não seria melhor escolher uma expressão mais adequada para começar, em vez de escolher uma ao acaso, o Daniel selecionou 3×6=? e criou uma situação de Comparação multiplicativa (Greer, 1992): "O Pedro tem seis balões, o amigo tem o triplo, quantos balões tem o amigo?"

Passa-se rapidamente para outra expressão (3×?=18), e o Daniel enunciou "Pode ser assim: três amigos, ao todo têm dezoito balões. Quantos balões tem cada amigo?" Esta é uma potencialmente multiplicativa (divisão de partilha equitativa), mas é preciso assegurar que cada amigo tem o mesmo número de balões. A imprecisão que foi corrigida logo a seguir, depois de ter sido chamado a observar que os amigos poderiam ter quantidades diferentes de balões, não sendo necessário que cada um tivesse o mesmo número. Reformulou o problema dizendo "Três amigos, ao todo, têm dezoito balões. Sabendo que cada um tem o mesmo número de balões, quantos balões tem cada amigo?" O Daniel reteve a necessidade de explicitar esta característica das quantidades intensivas e não se esqueceu dela quando formulou o próximo problema.

Para a expressão ?×6=?, afirma que quer criar um problema diferente e disse "O Miguel fazia anos e convidou cinco amigos. Queria dividir dezoito chocolates pelos amigos e por ele mesmo. Sabendo que cada amigo e o Miguel iam comer o mesmo número de chocolates, quantos chocolates comeu cada um?" Trata-se de um enunciado ligeiramente mais elaborado na medida em que é necessário reconhecer que são cinco amigos mais o Miguel, perfazendo seis pessoas pelas quais vão ser partilhados os chocolates. No entanto, tal como na anterior, é uma situação de divisão de partilha equitativa. O Daniel reconhece a semelhança entre os dois problemas.

INV. – *Okay*. Vamos lá ver uma coisa. A resposta que tens aqui a este problema [3×?=18] é cada amigo tem seis balões. E aqui [?×6=18] cada um come três chocolates. São respostas muito parecidas.

Daniel – São.

INV. – Por que é que são parecidas?

Daniel – Porque eu pergunto quase a mesma coisa. Porque aqui eles também vão repartir. E aqui eles também vão repartir.

Incentivado a formular um problema diferente, cuja pergunta ou resposta não contenha a expressão "cada um", o Daniel disse que não é capaz. Por fim procurou-se verificar se seria capaz de inventar um problema diferente do primeiro, isto é, um problema para a expressão 3×6=? que não fosse de comparação multiplicativa.

INV. – […] No princípio inventaste um problema que é "O Pedro tem seis balões, o amigo tem o triplo, quantos balões tem o amigo?" É um problema que diz que uma pessoa tem o triplo de outra. Também podia ser uma caixa que tinha o triplo de coisas que outra. Consegues inventar um problema que também se resolva com três vezes seis, mas que seja diferente deste?

Daniel – Podia ser como estes.

INV. – Como estes?

Daniel – Em vez de ser um menino tem seis e outro tem o triplo, podia ser um menino tem seis, outro tem seis e outro tem seis. Eram três meninos e cada um tinha seis e ao todo tinham dezoito.

INV. – E isso é diferente?

Daniel – Quer dizer, é quase igual, mas é diferente.

INV. – Muito bem. Queres dizer mais algum problema?

Daniel – Podia inventar mais, mas iam ser mais ou menos parecidos.

Em suma, o Daniel envolveu apenas quantidades discretas nos problemas que inventou, não recorre, por exemplo, a contextos de bens e custo que aparecem comummente nem de Produto de medidas (Vergnaud, 1983). Formula sem dificuldade problemas que se enquadram nas classes Grupos iguais e Comparação multiplicativa (Greer, 1992). Pela facilidade com que identifica situações de natureza multiplicativa talvez fosse legítimo esperar que formulasse situações de cálculo de área, assunto já explorado em sala de aula. No entanto, isto não pode ser tomado como significativo pois, tal como explica, os problemas que inventou são fáceis e, aparentemente, associa essa facilidade à simplicidade das relações numéricas presentes dizendo "São muito fáceis. O seis é o dobro de três. O dezoito é o triplo de seis. São todos números da tabuada do três."

8.2.5. A Tarefa: "Caixas de gelados"

O Daniel leu o enunciado sem hesitações (Figura 18, na pág. 88).

As quatro perguntas feitas pelo Daniel ao longo da entrevista, de acordo com a ordem pela qual foram explicitadas, foram:

1) Quantos gelados tem cada caixa?
2) Quanto custa[ria] cada caixa [se não houvesse a promoção]?
3) [Quanto custou cada caixa com a promoção?]
4) [Com a promoção, quantas caixas ele pagou?]

O que aparece entre parênteses reto são as perguntas ou acrescentos feitos após discussão ou insistência para formulação de mais perguntas. Contudo, a quarta pergunta, embora explicitada na forma interrogativa já no final da entrevista, está presente desde o início. Antes de iniciar a formulação das perguntas começou por exprimir a sua descoberta sobre a condição da promoção. Só depois fez as duas primeiras perguntas.

Daniel – Então… mas aqui eu já reparei numa coisa que é 'uma promoção que dizia leve três caixas e pague duas'. Se ele levou seis, portanto três vezes quanto é que vai dar seis? Três vezes dois dá seis. E aqui dois vezes dois dá quatro, portanto ele levou seis caixas, mas só pagou quatro.

INV. – Hum.

Daniel – Então quatro caixas custavam isto. [aponta para o valor expresso no enunciado]

INV. – Hum.

Daniel – Então, tenho que fazer vinte e quatro a dividir por quatro, que são as caixas que ele pagou e sei quantos gelados é que tem cada caixa. Então posso fazer 'quantos gelados tem cada caixa?', na pergunta…

INV. – Podes fazer uma pergunta que é 'Quantos gelados tem cada caixa?'. [ele escreve a pergunta].

Daniel – Também posso saber quanto custou cada caixa. [e escreve a pergunta: Quanto custa cada caixa?]

Feitas estas duas perguntas, o Daniel, embora se empenhe na procura de outras questões, relendo e revendo os dados do problema e as perguntas que já tinha formulado, manifestou um impasse.

Como se pode perceber no diálogo, as duas primeiras perguntas, "Quantos gelados tem cada caixa?" e "Quanto custa cada caixa?", surgem depois da interpretação da promoção. O Daniel descobre que, das 6 caixas que foram adquiridas, só 4 foram efetivamente pagas. A consequência lógica desta relação seria a pergunta que incide sobre o preço de cada caixa e não a que incide sobre o número de gelados por caixa. Mas esta é feita em primeiro lugar, depois de explicitar que a pode resolver dividindo o número total de gelados adquiridos pelo número de caixas. No entanto, propõe-se dividir por 4 e não por 6 caixas. Como se pode observar no diálogo, a razão para esta aparente distração está na importância que atribui à descoberta das relações envolvidas na condição promocional. De facto, o Daniel evocou por três vezes, ao longo da entrevista, esta sua descoberta: a primeira vez antes de formular as primeiras perguntas, a segunda vez durante o diálogo sobre a sua maneira de pensar na formulação das perguntas e, por último, aquando da resolução dos problemas colocados pelas perguntas. É nesta última situação, quando se propõe resolver o problema, que descobre o seu engano. Repare-se que, embora o investigador chame a atenção para a pergunta, com o intuito de sublinhar a independência relativa à promoção, o Daniel volta a evocar a sua descoberta.

INV. – Atenção, a pergunta é 'quantos gelados tem uma caixa?', é a tua pergunta, *okay*? Pronto, não te esqueças, é essa que tu vais responder.

Daniel – Sim, mas para resolver também tenho que explicar isto [aponta para o enunciado].

INV. – Então explica.

Daniel – O três multiplicado por dois, dá seis. E o dois multiplicado por dois, dá quatro. Portanto ele ia levar seis e ia pagar quatro. Agora sei que ele tem vinte e quatro gelados, e o vinte e quatro vai ter que dividir por quatro… não, por seis! Que foi o que ele levou.

É a insistência que faz na descoberta das condições impostas pela promoção que torna plausível considerar que tal descoberta constitui o *leitmotiv* de todas as suas perguntas e uma espécie de base que sustenta a resolução. Repare-se que, depois de afirmar que "ele levou seis caixas, mas só pagou quatro" conclui "Então, tenho que fazer vinte e quatro a dividir por quatro" acrescentando depois "Então posso fazer quantos gelados tem cada caixa?" pensando em dividir 24 gelados por 4 caixas. No mesmo sentido, também a sua segunda pergunta incide sobre o custo de uma caixa sem a promoção, embora não o explicite, ou seja, propõe-se dividir 7,20 por 4 e não por seis.

Na resolução, do ponto de vista dos procedimentos de cálculo, dos problemas colocados pelas duas primeiras perguntas não mostra qualquer dificuldade. O número de gelados por caixa, a divisão de 24 por 6, é determinado mentalmente e para o custo de cada caixa (sem a promoção) recorre com facilidade ao algoritmo da divisão de 7,20 por 4.

Depois de resolver estas duas, o Daniel voltou a concentrar-se na descoberta de outras perguntas mas sem sucesso. É quando se discute a influência da promoção no custo das caixas de gelados que surge a alteração da segunda pergunta e a formulação, por consequência, da terceira.

INV. – Bom, posso fazer-te uma pergunta?

Daniel – Hum.

INV. – Este preço de caixa…

Daniel – Hum.

INV. – É um preço sem promoção ou com promoção?

Daniel – Com a promoção.

INV. – De certeza?

Daniel – O preço de gelados da caixa é igual, só que ele em vez de ter pago as 6, só pagou 4.

INV. – Mas ele gastou 7,20€ e trouxe 6 caixas, não?

Daniel – Ah!… Sem.

INV. – É sem a promoção porquê, Daniel?

Daniel – Porque as caixas custam sempre o mesmo, ele pode levar seis… Mas em vez de as pagar todas, de as pagar as seis, não paga as seis, só paga 4.

INV. – Hum.

Daniel – Sim. Então aqui no fundo tenho que adicionar 'Quanto custou cada caixa com promoção?' e 'Quanto custou cada caixa sem promoção?'

INV. – Quanto é que custou cada caixa com promoção e quanto é que custava cada caixa se não houvesse promoção.

Daniel – Então, aqui este divide por 4 e este divide por 6.

INV. – 'Quanto custou cada caixa?', tu foste dividir por 4 para saber quanto custou cada caixa…

Daniel – Sem promoção.

Observa-se, neste diálogo, que a descoberta de terem sido pagas apenas 4 caixas, exerce influência no reconhecimento que o custo de cada caixa é diferente se forem adquiridas com ou sem a promoção. Em rigor, a interpretação que ele fez, que o preço da caixa é sempre o mesmo, é correta. A promoção apenas permite adquirir caixas que não são pagas. Mas essa perspetiva dificulta reconhecer a possibilidade de se determinar o valor que se gasta em cada caixa adquirida com promoção. É só depois de reconhecer esta possibilidade que surge a terceira pergunta como um reverso da segunda.

A quarta pergunta surge logo depois da escrita das anteriores e corresponde a uma explicitação interrogativa da descoberta feita inicialmente. Esta descoberta envolve a capacidade para determinar o quarto termo recorrendo à relação escalar, isto é, o modo como explicita a relação permite observar que o Daniel recorre ao escalar que relaciona dois valores dentro da mesma grandeza: ele identifica o fator escalar 2 que relaciona 3 caixas com 6 caixas (adquiridas) e aplica-o sobre as duas caixas ditas na condição para saber o número de caixas efetivamente pagas com a aquisição de 6. Este conhecimento está relacionado com os processos usados em aula para resolverem problemas de proporcionalidade. O recurso a tabelas de razão, para usar relações escalares, foi bastante valorizada em aula, desde cedo, na resolução de problemas envolvendo a multiplicação.

No final da entrevista o investigador sugere algumas perguntas que podiam ter sido feitas, tais como o preço de cada gelado, o custo das seis caixas se não houvesse promoção,… Para cada uma delas o Daniel explicita sem hesitação o processo correto de resolução, mostrando que tem o conhecimento necessário para as resolver. Portanto, embora se veja que o Daniel faz perguntas sobre o que julga conseguir resolver, este não é o único fator que conduz a uma pergunta. A entrevista permitiu observar a persistência da descoberta do número de caixas pagas, mas esta descoberta não gerou uma pergunta espontânea da parte do Daniel, apenas no final a traduziu numa pergunta por sugestão do investigador. A importância desta descoberta, aliado ao facto do Daniel ter tentado sem sucesso, por várias vezes, fazer mais perguntas, permite levantar a questão se uma descoberta deste género, isto é, uma descoberta muito significativa para uma pessoa, poderá funcionar como uma espécie de travão à formulação de outras perguntas.

8.2.6. Síntese

Neste ponto pretende-se reunir o conjunto dos resultados acima apresentados referentes ao Daniel. Trata-se de uma síntese dos resultados essenciais que se relacionam para responder às questões do estudo. Apresentam-se em três tabelas.

A primeira tabela (Tabela 8, na pág. 118) reúne as opiniões ou conceções explícitas do Daniel sobre o seu desempenho e o dos seus colegas participantes no estudo, as suas preferências no que respeita a matérias de estudo, especificamente o que respeita à Matemática, o que pensava sobre a resolução e formulação de problemas de um modo geral. Estes dados são importantes para enquadrar os processos que usou na formulação dos problemas.

Verifica-se que a opinião que o Daniel tinha sobre si alinha coerentemente com a opinião dos seus colegas participantes.

Parece significativo relacionar vários aspetos presentes nesta tabela, nomeadamente gosto que tem pela Matemática e a consideração do seu nível de desempenho com a qualidade dos problemas que gostava de resolver (difíceis), com o sentido que atribuía à formulação de problemas (desenvolvimento do seu conhecimento, das suas capacidades) e, finalmente, com a manifestação do gosto pela formulação de problemas de que não sabia a resposta (e com muitos cálculos), em estreita ligação com a complexidade do problema livre que formulou (presente na Tabela 9). Outras características que são essenciais ter em conta, a primeira das quais se relaciona com a afirmação precedente, é a sua visão sobre a formulação de problemas, distinguindo dois tipos de formulação, e a sua motivação que passava pelo seu gosto pessoal.

A segunda tabela (Tabela 9, na pág. 119) apresenta uma síntese dos resultados obtidos no trabalho realizado em torno das tarefas de formulação de problemas para expressões numéricas (“30×25” e “3×6=18) e para a formulação livre de um problema que fez na 3.ª parte da entrevista Livre. Na primeira coluna está o enunciado inventado; na segunda o sentido do contexto de acordo com Greer (1992); na terceira coluna, designada Formulação, está a indicação da origem do problema, i.e., o que esteve na base da formulação; na quarta coluna é revelada o modo de resolução, que só faz sentido ser apresentado para a resolução da expressão 30×25 e para a resolução do problema formulado livremente; na última coluna estão anotações sobre algum aspeto relevante.

Nestas tarefas de formulação de problemas a partir de expressões numéricas, o conhecimento matemático do aluno é manifestado pela sua capacidade de adequar o contexto que inventa ao modelo matemático que o resolve e que está explícito na expressão numérica dada. O processo de formulação está na explicitação da fonte de inspiração para a criação do contexto. Sobre isto parece claro que, para o Daniel, esta fonte estava na evocação da memória de problemas já resolvidos, que no seu caso, são problemas que considerou desafiantes, ou nos quais teve dificuldades em resolver, consistindo a formulação numa reformulação com o objetivo de complexificar o problema. A impossibilidade de resolução deste problema pode estar relacionada também com a tentativa de formulação de um problema para o qual não se sabe a resposta, o que está de acordo com o que ele disse sobre a formulação de problemas, que pode ser dividida em duas categorias, a formulação de problemas de que já se sabe a resposta e a contrária. O seu gosto pela Matemática, o gosto pessoal pela formulação de problemas, são outras componentes do processo.

A evocação de memória de problemas já resolvidos anteriormente, tal como explicou o Daniel, também foi usada formulação do enunciado para a expressão 30×25. Neste caso não houve ou não explicitou a vontade de tornar mais difícil, o que na verdade não faria sentido, dado que para ele, a complexidade do problema pode estar na quantidade de cálculos que são necessários para o resolver.

Outro aspeto que merece ser mencionado relativamente aos problemas formulados na Tabela 9 é o facto de estarem todos na categoria de contextos de Grupos iguais. Isto pode estar relacionado pela predominância do sentido de Grupos iguais nos problemas de cálculo que os manuais escolares proporcionam[21]. Este aspeto é significativo principalmente na tarefa de formulação do problema para a expressão 30×25, tarefa essa realizada no período em que se estudava a Medida em aula (cf. Tabela 6, na pág. 77). Aliás, quatro dias antes da entrevista sobre a tarefa "30×25", a turma tinha estado a calcular áreas de retângulos de perímetro 20 com dimensões inteiras. No entanto, há outro fator importante que pode contribuir para a não formulação de problemas envolvendo medida: os números presentes na expressão são números inteiros. É evidente que se os números não fossem inteiros os contextos teriam necessariamente de envolver medidas.

A terceira tabela (Tabela 10, na pág. 120) apresenta uma síntese dos resultados essenciais obtidos na realização das tarefas de formulação a partir de contextos, "Caixas de Pastéis" e "Caixas de Gelados" respetivamente. Esta tabela apresenta na primeira coluna, "Comentário ao enunciado", que se refere ao que o aluno disse ou fez logo após a leitura do enunciado da tarefa. Isto é significativo porque se verifica que tem relação com as perguntas formuladas e com o processo de formulação. Na segunda coluna estão as perguntas formuladas. A terceira coluna refere-se à origem ou processo de formulação. Na quarta coluna está o processo de resolução.

[21] No manual escolar adotado na turma no 3.º ano, 29 dos 38 problemas resolvidos por uma multiplicação tinham o sentido Grupos iguais (Greer, 1992). Apenas 6 se situavam na classe Medidas iguais (envolvendo sempre números inteiros) sobre tudo com referentes a bens e custo, 3 de Produto cartesiano, 2 referentes a cálculo de área de retângulos (dimensões inteiras) e 2 relativos a disposição retangular de objetos.

Tabela 8: Resumo dos resultados relacionados com opiniões e conceções do Daniel sobre o desempenho, as matérias escolares, a resolução e a formulação de problemas.

	Considerações explícitas do aluno	Observações
Desempenho	Considerava-se, na resolução de problemas, a par da que apontava ser a melhor aluna, a Madalena.	A Isabel achava que ele estava a par da Madalena, entre os melhores. O Ricardo achava que estava logo a seguir à Madalena. A Madalena considerava que ele era o melhor a resolver problemas.
Preferências Temas	A Matemática era a sua disciplina de eleição. Preferia os Números e Operações, acima de Geometria e Medida e de OTD[22] cujos problemas não achava tão interessantes.	Ele foi vago na indicação das aprendizagens que considerava importantes porque, de acordo com o que dizia, não conseguia lembrar-se de todas por serem muitas.
Tópicos	Referia os algoritmos, a adição e as frações como aprendizagens significativas.	
Resolução de problemas	Gostava de problemas difíceis e de raciocínio e também dos que tinha muitas *contas*. Evocava de memória e com facilidade enunciados (diversos) de problemas de que gostara, que teve dificuldades em resolver.	Evocou de memória um problema que não tinha conseguido resolver, reproduziu o enunciado, resolveu-o e identificou a razão por que não tinha conseguido.
Formulação de problemas	Gostava de inventar problemas e considerava-se bom nessa atividade. Gostava tanto de inventar livremente como a partir de dados fornecidos; formulação de problemas desenvolvia o seu conhecimento, as suas capacidades. Distinguiu dois tipos de atividades de formulação de problemas: a que se faz sabendo de antemão a resposta e a contrária. É esta que prefere. O interesse da formulação de problemas residia na satisfação do seu gosto pela Matemática.	Na formulação do problema preferido, inventou um com grande quantidade de dados e relações complexas, que tornaram o problema impossível tendo em conta as condições que estabeleceu.

[22] Organização e Tratamento de Dados

Tabela 9: Síntese dos resultados obtidos do Daniel nas tarefas de formulação baseadas em expressões numéricas e no problema de formulação livre.

Tarefa	Enunciado	Sentido do contexto	Formulação	Resolução	Anotações
“30×25” 2014 maio 16	“Uma prateleira tem 25 livros. Se existissem 30 prateleiras quantos livros haveria?”	Grupos iguais	Baseado noutro que tinha formulado em aula a partir da expressão 3×4.	Calculou mentalmente o resultado fazendo 3×(10×25).	
“Livre” 2014 outubro 23	“O João estava numa escola com 379 alunos. Haviam 12 salas. Em cada 3 salas era um ano. As turmas do 2.º ano e do 4.º ano, que são 3 cada, eram o dobro das turmas do 1.º ano e do 3.º ano. Em conjunto, quantos alunos havia no 4.º ano e no 2.º ano? E no 3.º ano e no 1.º ano?”	Divisão por partilha equitativa (Grupos iguais) e Multiplicação por um escalar	Queria tornar mais difícil um problema parecido, resolvido anteriormente (e que teve dificuldade em resolver) cujo modelo matemático de base se equaciona pela expressão: $379 = 2x + x$	Sem solução possível devido às condições por ele estabelecidas. Deu conta das incompatibilidades de formulação à medida que ia relendo e tentando resolver.	A complexidade pretendida está de acordo com o seu interesse por problemas com muitos cálculos e difíceis.
“3×6=18” 2014 dezembro 2	3×6=? “O Pedro tem seis balões, o amigo tem o triplo, quantos balões tem o amigo?”	Multiplicação por um escalar: Comparação multiplicativa	Considerava muito fáceis os problemas que inventou em virtude da ordem de grandeza e das relações de dobro e triplo dos números.		
	3×?=18 “Três amigos, ao todo têm dezoito balões. Quantos balões tem cada amigo?”	Divisão por partilha equitativa (Grupos iguais)			Na entrevista a out.16 recordou um problema de divisão por agrupamento.
	?×6=18 “O Miguel fazia anos e convidou cinco amigos. Queria dividir dezoito chocolates pelos amigos e por ele mesmo. Sabendo que cada amigo e o Miguel iam comer o mesmo número de chocolates, quantos chocolates comeu cada um?”	Idem	Não lhe parecia possível (no momento) inventar um problema de divisão em que não se perguntasse “o que cabe a cada um”.		

Tabela 10: Síntese dos resultados obtidos do Daniel nas tarefas de formulação baseadas em contextos.

Tarefa	Comentário ao enunciado	Perguntas enunciadas	Formulação	Resolução
“Caixas de Pastéis”	Explicitou a relação funcional entre o número de caixas e de pastéis.	“Quantos pastéis há em cada caixa?”	A pergunta nasceu da antecipação da relação funcional cuja resposta já tinha antecipado.	Explicitou 16÷4, e que o resultado são 4 pastéis por caixa.
2014 outubro 9	Explicitou que a relação de 4 pastéis por caixa se mantém em todas as entradas de dados na tabela.	“Em 32 caixas, quantos pastéis estavam embalados?”	Afirmou a relação funcional para justificar a pergunta, embora tenha escolhido 32, número que está em linha com a relação escalar.	Multiplicação pela constante de proporcionalidade 4. Recurso à propriedade distributiva no cálculo de 4×32: 4×30=120; 4×2=8; 4×32=128.
“Caixas de Gelados” 2015 janeiro 6	Interpretou a condição promocional afirmando o n.º de caixas efetivamente pagas usando a relação escalar.			Relação escalar: dobro: se em 3 paga duas, em 6, dobro de 3, paga o dobro de duas, 4.
		“Quantos gelados tem cada caixa?”	Partiu da interpretação da condição promocional: se dividir 24 gelados pelo n.º de caixas efetivamente pagas, saberia o número de gelados por caixa.	Cálculo mental: 24÷6 (emendou por sua iniciativa a intenção inicial de dividir por 4)
		“Quanto custa[ria] cada caixa [se não houvesse a promoção]?”	As perguntas nasceram da antecipação da resolução.	Algoritmo: 7,20÷4

Em primeiro lugar é preciso alertar que, relativamente à tarefa “Caixas de Gelados”, apenas estão na tabela as perguntas que o Daniel formulou espontaneamente, antes de qualquer intervenção do investigador. Considerou-se que deviam constar nestas tabelas de síntese apenas o que esclarece a formulação e o conhecimento matemático relativo às questões ou problemas formulados em primeira mão.

Pode-se observar que tanto numa tarefa como na outra há uma estreita ligação das questões formuladas à primeira observação ou interpretação que é feita aos dados fornecidos no contexto. Nas duas tarefas em causa é observável que as perguntas formuladas pelo Daniel foram construídas a partir da antecipação da resolução. Esta antecipação da resolução na formulação das perguntas verifica-se também pelo modo como são depois resolvidas.

Na tarefa “Caixas de Pastéis” interpretou os dados presentes na tabela relacionando-os pela relação funcional e usou essa relação para obter o resultado. Embora acabe por reconhecer que o número de caixas que escolheu (32) para a sua pergunta foi o dobro do número que o antecede (16) afirmou desde o início que a resolução da pergunta se fazia pela multiplicação do número de caixas (32) pela constante de proporcionalidade (4) e não pela multiplicação de 64 pastéis pelo escalar (2).

Na tarefa “Caixas de Gelados”, a pergunta “Quanto custa cada caixa?” diz respeito ao custo sem considerar a promoção. Isso não foi explicitado originalmente na pergunta, mas percebido quando, na resolução, divide 7,20 € por 4 caixas. Observa-se então que a pergunta sobre o custo de cada caixa nasceu em conformidade com a descoberta inicial da condição promocional, descoberta repetidamente afirmada pelo Daniel.

Deve-se salientar a impressão que a descoberta da condição promocional parece ter exercido sobre o Daniel, não só porque parece ter condicionado as perguntas que formulou, mas também a própria resolução. Repare-se na sua primeira explicitação do cálculo do números de gelados em cada caixa, propondo-se dividir os 24 gelados adquiridos por 4 caixas e não pelas 6 que os continham.

8.3. O caso da Isabel

8.3.1. Características pessoais

Com quem vivia e estudava

A Isabel vivia com os pais e uma irmã. A irmã tinha 10 anos e frequentava o 4.º ano na mesma escola que a Isabel. Normalmente fazia sozinha os trabalhos que levava para casa e só depois de acabar é que os mostrava aos pais que os corrigiam. Era sobretudo o pai que a ajudava. Mas à sexta-feira ia para casa da avó do Daniel, que era explicadora e lhe dava apoio. A avó do Daniel tinha sido professora e já estava reformada.

O gosto pela Matemática

Na primeira entrevista, no 2.º período do 3.º ano dizia que a Matemática era a disciplina de que mais gostava. Mas depois, no princípio do 4.º ano, afirmava que gostava mais da disciplina de Português porque o avô era professor de Português. Nessa altura, numa escala de 1 a 5 deu 4 à Matemática e 5 a Português. Sobre o pai e a mãe dizia que era ele quem gostava mais de Matemática.

De entre os três temas matemáticos curriculares, os Números e Operações, a Organização e Tratamento de Dados e a Geometria e Medida gostava menos de Geometria e Medida e gostava mais da Organização e Tratamento de Dados. Não sabia explicar bem porquê, mas dizia "já estou mais habituada a eles". Dizia também que embora soubesse as figuras geométricas não gostava mesmo nada dos problemas que envolviam figuras geométricas. Quanto aos que envolviam medidas como preço, capacidade e massa dizia que gostava mais ou menos.

Entre fazer cálculos ou resolver problemas preferia fazer cálculos. Não gostava de estar a explicar como tinha pensado a resolver um problema.

A operação de que não gostava era a divisão (opinião dada no 3.º ano). Não gostava porque, dizia, "não me entra na cabeça". Da multiplicação gostava mais ou menos.

O desempenho em Matemática

Na sua opinião, os melhores alunos a Matemática na sua aula são a Madalena e o Daniel. Depois destes vêm a Rita, o Guilherme, a Francisca e o Miguel que também são bons.

A si mesma considera-se entre os médios, a par do Ricardo

Quando questionada sobre o que de mais importante aprendeu de Matemática aponta para os números, as operações, nomeadamente a divisão, e as frações – diz "meios e terços", para se referir às frações. No início do 4.º ano mostrava-se capaz de explicitar algumas das dificuldades nas operações, distinguindo as fáceis das difíceis para além do critério da quantidade de algarismos nos números envolvidos.

Era capaz de escrever uma adição mais complexa escolhendo para algarismos numa determinada ordem os que obrigam ao transporte de unidades dessa ordem para a ordem imediatamente superior: "não podemos esquecer do "e vai um". Também quanto à subtração era capaz de apresentar como mais difícil uma em que o algarismo do aditivo numa ordem é inferior ao do subtrativo. Para a multiplicação a dificuldade, na sua opinião, estava em saber a tabuada e não esquecer "os que vão". No que se refere à divisão já tinha mais dificuldade em explicitar com clareza aquilo que a podia tornar mais difícil. Apresentou 4682÷92 como sendo uma divisão difícil mas conseguiu resolvê-la sem dificuldade.

A memória de problemas

Na resolução de problemas, a Isabel dizia que as dificuldades dependiam dos problemas e não foi capaz de ser específica na caracterização dessas dificuldades. Foi perentória ao dizer que "eu gosto dos problemas que resolvo bem. Porque sei mais e já sei melhor como é que ele se faz e é mais fácil depois . . . identificar outros", ou seja porque consequentemente seria mais fácil resolver outros parecidos.

Considerava que, quando resolvia um problema talvez pudesse lembrar-se de outros, por exemplo, que se resolvesse com a mesma operação, mas dizia também que não guardava na memória problemas que já tivesse resolvido. Lembrava-se vagamente de alguns: um porque tinha uma divisão, mas já não se lembrava bem da história, muito menos dos números. Também se lembrava de um problema que envolvia gráficos mas não era capaz de o reproduzir.

Lembrava-se, sim, de problemas que já tinha inventado. Por exemplo, o último era de uma tarefa do manual escolar que pedia para inventar um problema que se resolvesse com a operação 806×84 (diz sem segurança os números envolvidos na tarefa). Lembrava-se desse problema porque tinha sido ela a inventar e porque era de multiplicar: "Uma menina tinha 806 livros e deram-lhe 84 vezes mais. Quantos livros é que a menina tem?" De facto, o livro de fichas tinha tarefas de formulação de problemas para expressões numéricas. Repare-se entretanto que este problema que formulou não se resolve pela expressão 806×84, mas por 806×84+806. Também se lembrava de ter já feito com o investigador uma tarefa de formulação de problemas do mesmo género (a tarefa 30×25).

A formulação de problemas

Inventar problemas não era uma novidade para a Isabel. Na entrevista feita no 3.º ano dizia que "até é giro" inventar problemas. Achava que era bom inventar porque era uma maneira de "treinar a fazer as coisas". Muito provavelmente a Isabel estava a referir-se à atividade que era costume fazer nas aulas: treino de algoritmos a partir de *word problems* ditados pela professora ou pelos próprios alunos. Mas nas entrevistas feitas no 1.º período do 4.º ano já dizia que preferia resolver a inventar. Se for para inventar preferia fazê-lo livremente, isto é, não ter expressões numéricas ou condições para a formulação.

Perante a proposta de formular um problema de que gostasse, a Isabel enunciou: "A Margarida tinha 103 brinquedos. Deram-lhe mais 375 brinquedos. Depois tiraram-lhe 50 brinquedos. Quantos brinquedos tem agora?"

Gostava deste porque tinha adições e subtrações que são as operações de que mais gostava. A resolução deste problema que formulou não lhe ofereceu qualquer dúvida, tendo usado o algoritmo da adição e subtração respetivamente.

8.3.2. A Tarefa "30×25"

Já se disse acima, para o caso do Daniel, mas repete-se aqui que a resolução da tarefa iniciou-se com todos os participantes presentes em simultâneo em torno de uma mesa numa sala própria onde normalmente se realizavam as entrevistas. Apesar de estarem todos juntos, a tarefa de formular o problema, de o escrever, para a expressão numérica dada foi feita individualmente. Quando acabavam de escrever voltavam para a sala e a entrevista (individual) foi feita posteriormente nesse mesmo dia. Naturalmente que, estando todos reunidos na mesma sala, antes de iniciar a resolução, conversaram uns com os outros. Essa conversa ficou registada em vídeo e nela foram significativas a intervenções sobre o gosto e a imaginação de cada um.

Assim que a tarefa é apresentada oralmente pelo investigador, a Clarisse[23] interveio para dizer que não tinha imaginação e seguiram-se várias intervenções simultâneas. Entre essas intervenções, difíceis de descriminar, ouve-se a Madalena afirmando que tem imaginação mas que não gosta de inventar e prefere resolver. Ouve-se também distintamente o Daniel dizendo convictamente que gosta e novamente a Madalena reafirmando que prefere resolver. A Isabel interveio então dizendo "Eu também." As intervenções são temporalmente tão próximas que é difícil saber se a Isabel estava referir-se a ambas as afirmações da Madalena, que não tinha imaginação e preferia resolver, ou apenas a uma delas, em particular a que se referia a preferir resolver.

A tarefa de formulação do enunciado foi feita por escrito individualmente. A resolução foi feita posteriormente durante a entrevista individual.

O problema que a Isabel formulou e registou por escrito diz "A Joana tinha trinta balões e o amigo tinha vinte e cinco vezes mais balões. Ao todo, quantos balões os dois têm?" No entanto,

[23] Esta aluna fazia inicialmente parte do grupo de participantes, tendo sido posteriormente excluída a apresentação do seu caso pelas razões que já se mencionaram.

quando se inicia a entrevista com a Isabel, esta começa por expressar dúvidas quanto à formulação que já tinha feito.

> Isabel – Ó Pedro [investigador], eu, às vezes, confundo uma coisa: quando nós estamos a fazer problemas, é assim… ah, nós, queremos dizer… quantas coisas é que o João tinha…
>
> INV. – Sim.
>
> Isabel – E nós pomos, se fosse trinta vezes vinte e cinco tínhamos de pôr trinta… não é? Tipo, o Miguel tinha trinta balões…
>
> INV. – Sim.
>
> Isabel – E o amigo tinha vinte e cinco vezes mais… Quantos balões ao todo eles têm? Podia ser assim!?

Este pedido de esclarecimento significa em primeiro lugar que a Isabel não estava segura quanto à correção ou rigor do seu enunciado. A maneira como começou por colocar a dúvida parecia querer apenas confirmar se o problema que escreveu era válido, pois ele não se resolve com a expressão 30×25 mas por 30×25+30, Mas na continuação do diálogo parece esclarecer a sua dúvida noutro sentido.

> INV. – Porque é que tu achas que não pode ser assim?
>
> Isabel – Não, por causa que… Ahm… A conta era trinta vezes vinte e cinco.
>
> INV. – Sim.
>
> Isabel – E eu… ah… tinha de ter trinta balões, ou trinta amigos?
>
> INV. – Eh… Explica melhor, não estou a entender.
>
> Isabel – Tenho de pôr trinta balões, não é trinta amigos, pois não?
>
> INV. – Ahh, depende daquilo que tu quiseres.
>
> Isabel – Tanto faz?
>
> INV. – Ahh, tanto faz, quer dizer, tem que ter a ver com aquilo que… que tu depois pretendes fazer, não é?
>
> Isabel – Mas aqui é trinta. Trinta balões?
>
> INV. – Aí, se forem trinta balões, depois como é que vai ser?
>
> Isabel – O amigo tinha vinte e cinco vezes mais balões. Ao todo quanto é que os dois tinham?
>
> INV. – Pronto! Achas que isso está bem, não?
>
> Isabel – Sim.
>
> INV. – Pronto! Por que é que tu…
>
> Isabel – Ou então podia ser vinte e cinco balões?!

INV. – Se fossem vinte e cinco balões, como é que ficava?

Isabel – A Joana tinha vinte e cinco balões e o amigo tinha trinta vezes mais balões. Ao todo, quantos balões os dois têm?

No diálogo acima não parece que a dúvida tivesse a ver com a adequação do enunciado à expressão numérica, mas questionou o referente de cada um dos fatores. Ou os balões possuídos pela Joana eram 25 e o amigo tinha 30 vezes mais, ou a Joana tinha 30 balões e o amigo tinha 25 vezes mais. Uma interpretação mais literal diria que a questão estaria apenas em quem devia ter os balões e quem teria tantas vezes mais. Mas a dúvida pode ir além disso. Pode ter a ver com o lugar ocupado por cada número na expressão e o papel que desempenha, isto é, se o primeiro fator é trinta ele deve referir-se ao número de bens (balões) ou ao multiplicador "30 vezes mais", ou vice-versa. Na perspetiva de Vergnaud (1988) dir-se-ia que a Isabel perguntou qual dos fatores devia ser o operador escalar que transformaria o número de balões de um dos personagens no número de balões do outro personagem (30 vezes mais, ou 25 vezes mais). Para Schwartz (1988) este número (o multiplicador 25 vezes mais) não seria um número puro (um escalar sem dimensão) mas uma quantidade intensiva. No entanto, este autor considera que a multiplicação é uma operação que transforma o referente e, neste contexto, não há transformação do referente, pois a operação em causa, simplesmente aumenta o número de balões, algo que é próprio da adição. É forçado dizer que o operador 25 é uma quantidade intensiva. O contexto formulado pela Isabel tem características aditivas pois não há transformação do referente.

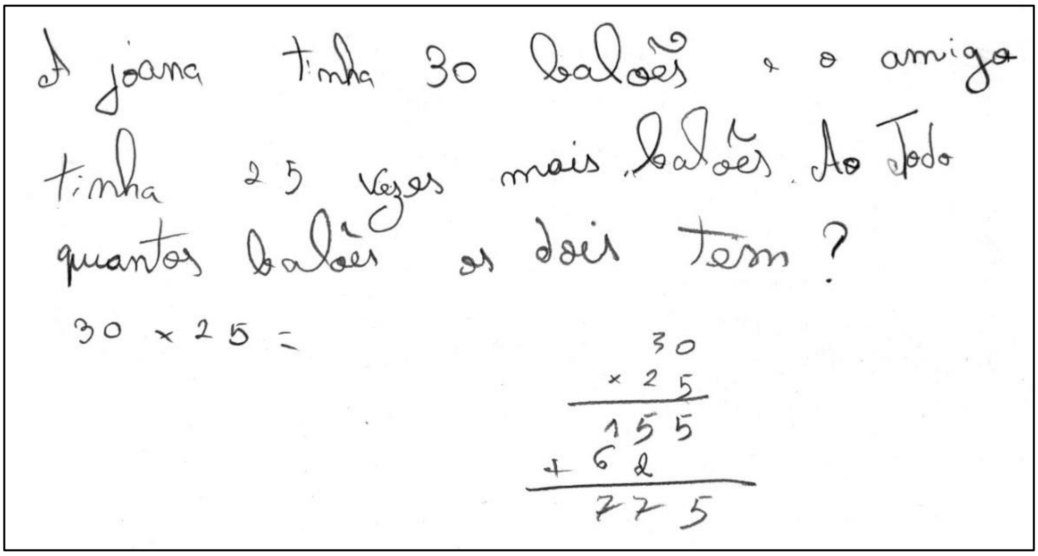


Figura 22: Resolução da tarefa "30×25" pela Isabel.

No contexto formulado há duas personagens que possuem balões. Numa situação aditiva o interesse é saber quantos balões possuem ambas. Para a expressão 30×25 o objetivo não pode ser quantos balões possuem os dois em conjunto, mas, sabendo quantos balões são possuídos por um, quantos balões possui o outro.

A Figura 22 mostra o registo feito pela Isabel na resolução da tarefa[24]. Para resolver o problema que formulou, a Isabel devia ter feito duas operações: primeiro calcular o número de balões do amigo e posteriormente adicionar o número de balões de cada um. A Isabel considerou o problema resolvido apenas com uma operação, a multiplicação.

INV. – Então, quando tu fazes a conta de trinta vezes vinte e cinco, esse resultado quer dizer o quê?

Isabel – Quer dizer… quanto ao todo eles tinham… os dois… as duas coisas juntas, o que é que… que é que eram! Quantos é que eram.

Ela confirma estar satisfeita com a resolução que fez dizendo sim, sem expressar dúvida, quando se lhe pergunta diretamente “tu fizeste este problema achando que tu resolves com esta conta?” Isto reforça a hipótese de que a multiplicação fosse considerada pela Isabel uma operação que reúne partes num todo. Mesmo quando explica porque imaginou este contexto, ela faz referência a um problema de estrutura aditiva:

INV. – . . . Porque é que te lembraste disto, desta situação?

Isabel – Apareceu-me na cabeça.

INV. – Apareceu-te na cabeça e achas que ele é parecido com algum problema que já tenhas resolvido?

Isabel – É…

INV. – Lembraste desse problema?

Isabel – Não.

INV. – Mas era assim mais ou menos como este, se calhar.

Isabel – Era.

INV. – Okay…

Isabel – Mas não era… de… vá… com trinta vezes vinte e cinco, era mais ou menos… não era de multiplicar… era, era de subtrações ou assim…

Ela assegurou que o problema em que se terá inspirado não era uma multiplicação e, sem certeza, mencionou a subtração. A semelhança com a subtração está na comparação da quantidade de bens de duas personagens.

[24] A Isabel não mostra dúvidas quanto às regras do algoritmo, apenas comete dois erros de cálculo que têm a ver com a multiplicação por zero. Isso foi depois desmontado na continuação da entrevista. Também foi esclarecida a correta resolução do problema que formulou, assim como deveria alterar a pergunta para corresponder à expressão apresentada na tarefa.

A correção do enunciado para se adequar à expressão fornecida na tarefa passaria por perguntar apenas quantos balões tinha o amigo, retirando o interesse em saber quantos tinham ambos. Assim teríamos um problema que se enquadraria na classe de Comparação multiplicativa de Greer (1992). Na forma como a Isabel o formulou, envolvendo duas operações (30×25+30), a parte do problema que se refere ao cálculo do número de balões que pertencem ao amigo da Joana está dentro de um contexto de Comparação multiplicativa; a parte que pretende saber o número total de balões dos dois amigos aponta para um contexto de adição com sentido de Combinar.

8.3.3. A Tarefa "Caixas de Pastéis"

A Isabel começou por ler o enunciado (Figura 15, pág. 83) em silêncio e, a determinada altura interrompeu para perguntar "Isto é para fazer um problema de multiplicação?". Não recebeu uma resposta direta à pergunta, apenas o pedido que leia o enunciado em voz alta. Leu com fluência o enunciado e fez uma leitura linha a linha dos dados apresentados em tabela, ou seja, leu primeiro todos os dados da linha do número de caixas e depois todos os dados da linha do número de pastéis.

> Isabel – Os pais do António têm uma pastelaria. Um dia ele esteve a ajudar o pai a embalar uns pastéis que são vendidos em caixas iguais. À medida que ia colocando os pastéis nas caixas, o António ia escrevendo: Número de caixas: quatro, oito, dezasseis. Número de pastéis embalados: dezasseis, trinta e dois, sessenta e quatro. Faz uma pergunta para um problema que seja resolvido com uma multiplicação.

Imediatamente, acabada a leitura, a Isabel questionou se resolvia primeiro ou se fazia a pergunta.

> Isabel – *Okay*, nós podemos primeiro resolvê-lo não é? Ou fazemos primeiro a pergunta?
>
> INV. – Porquê? Porque é que tu queres resolver primeiro?
>
> Isabel – Queria fazer a tabela...
>
> INV. – Queres fazer primeiro a tabela? Explica lá bem essa ideia.
>
> Isabel – Eu queria fazer a tabela, e isto é de quatro em quatro, isto é de seis em seis. [hesita um pouco] Então podia ser quantas... Se fosse vinte e dois, se fosse vinte e duas caixas, quantos pastéis embalados havia?

Neste discurso inicial pode supor-se com alguma segurança que para a Isabel:

1. os dados numéricos apresentados estão integrados numa tabela,
2. os dados numéricos são sequências subordinadas a uma regularidade (cujas as razões de progressão de cada sequência são, respetivamente, de 4 em 4 e de 6 em 6,
3. a pergunta (ou pelo menos o dado numérico a integrar) depende da continuidade das sequências (22 caixas corresponde a 16 caixas mais 6).

Percebe-se que o dilema inicial entre resolver ou perguntar primeiro pode ter surgido pela necessidade de escolher um número para figurar na pergunta mas, por consequência, a resolução do problema colocado pela pergunta a formular seria também resolvido pela continuação das sequências. Ou seja, neste caso, para a Isabel, a resolução e formulação seriam indissociáveis.

O que não é fácil de perceber, e a entrevista não permite escrutinar, é:

1. o modo como a Isabel deduz que as sequências progridem de 4 em 4 e de 6 em 6;
2. porque é que ela acha que a sua pergunta se resolve com uma multiplicação se a progressão das sequências é (para ela) aditiva;
3. porque selecionou o número 22 caixas para figurar na sua pergunta.

Relativamente ao primeiro ponto, é possível pensar que ela tenha indicado que a sequência do número de caixas progride de 4 em 4 porque esse é o valor que distancia os dois primeiros números apresentados na tabela. Seguir o mesmo raciocínio para a sequência do número de pastéis seria, por exemplo, aceitar que ela tivesse encontrado 6 como diferença entre 16 e 32, provavelmente atendendo apenas aos algarismos das unidades, dizendo assim 6 porque no procedimento algorítmico começaria por dizer *seis para doze seis*.

Quanto ao segundo ponto na lista acima, a razão para pensar que o contexto envolve multiplicação pode estar numa das representações da tabuada presente no manual escolar adotado: uma tabela horizontal, com duas linhas, a de cima para a sequência dos números naturais e a de baixo para a sequência dos múltiplos do número a que se referia a tabuada[25]. É uma suposição, mas esta possibilidade pode também explicar porque interpretou aditivamente a tabela, já que uma das formas muito comuns usadas pelos alunos para construir a tabuada era justamente adicionar sucessivamente o número em causa; por exemplo, na tabuada do 6, listar os múltiplos de 6 adicionando sucessivamente 6 a partir de 6.

Mais difícil de compreender é a escolha de 22 para a pergunta que formula porque, se ela diz que quer resolver a situação, isto é, continuar a sequência dos números na tabela, interpretando a progressão das sequências como sendo de 4 em 4 para o número de caixas, e de 6 em 6 para o número de pastéis, então 22 deveria pertencer à sequência de caixas como resultado da adição de 4 a 16 e não de 6 a 16.

Após o diálogo acima transcrito, a Isabel registou a pergunta mas introduz uma ligeira alteração. A pergunta registada questionava sobre o número de pastéis em vinte e uma caixas e não em vinte e duas como disse oralmente. Esta mudança não é notada pela Isabel, e não foi questionada pelo investigador. Em rigor a alteração não se torna significativa pois, dado o interesse da Isabel em

[25] Além disso este tipo de tabela era usada para calcular produtos (em contexto) antes da aprendizagem dos algoritmos e, como já se disse na secção sobre as práticas de sala de aula, ela podia ser usada aditivamente.

"fazer a tabela", a resolução da pergunta é feita só depois da discussão e correta interpretação da razão de progressão das sequências numéricas. Nessa altura já tinha deixado de ser significativo o que levou a Isabel a escolher 22 ou 21 para o número de caixas. Realmente, mais adiante na entrevista ela afirmou não saber porque escolheu tal o número.

Após o registo da pergunta a Isabel volta a insistir em fazer a tabela.

Isabel – Então vou fazer a tabela. [começa a desenhar uma tabela idêntica à do enunciado]

…

Isabel – Vou já começar pelo último, porque este já sabemos, e é mais fácil começar por este.

INV. – *Okay*, tu vais começar em dezasseis, é isso? Dezasseis caixas.

Isabel – Sim. Há sessenta e quatro pastéis. Isto é de seis em seis não é? [apontou para a linha dos pastéis]

INV. – Não sei, verifica lá tu.

Isabel – É, de seis em seis.

INV. – Porque é que tu achas que é de seis em seis?

Isabel – Porque dezasseis mais seis são trinta e dois. [apontou para 16 e 32 da linha dos pastéis na tabela do enunciado]

INV. – É?

Isabel – Ai! Dezasseis mais seis, ai! Ahh… temos de ir à tabuada do seis ver o trinta e dois, e então havia! Ou então, 36, 37, 38, 39, 40, 41... Ah… é dezasseis. 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22. [pausa] Ai espera aí... [pausa] Temos de ver dezasseis mais seis se dá trinta e dois. Se der é porque é de seis em seis.

INV. – E dá?

Isabel – [depois de contar pelos dedos] Não...

Este diálogo, procurando descobrir como progridem as sequências numéricas presentes na tabela, prolongou-se no tempo e em detalhes. Não foi fácil para a Isabel descobrir a relação de dobro/metade entre dois números consecutivos nas sequências numéricas. A visão aditiva da Isabel sobre a regularidade que gere as sequências foi forte e resistiu até ao ponto em que ela colocou a hipótese de ser o dobro. A certa altura ela voltou a atenção para a sequência dos números de caixas e diz que variam de 4 em 4. O diálogo prossegue:

INV. – Isto daqui para aqui são quatro não são? [de 4 para 8 caixas] E daqui para aqui, quantos são? [de 8 para 16 caixas]

Isabel – São oito. [pausa]. Então são de oito em oito. Então, são quatro mais quatro, depois o resultado é mais… é vezes... oito!

INV. – Aqui é quatro mais quatro, oito. Aqui é oito mais...

Isabel – Oito.

INV. – Dá dezasseis.

Isabel – Ah, é o dobro! Ai não, não é nada.

INV. – Não é nada?

Isabel – É o dobro é!

INV. – Mostra lá porque é que é o dobro.

Isabel – Quatro, oito... Ah não, não é...

INV. – Não é o dobro?

Isabel – Oito, dezasseis... ah… é, é!

A ideia de que a progressão se deu por duplicação de cada termo só surgiu quando a Isabel se apercebeu da lengalenga “quatro mais quatro, oito mais oito”. Ainda assim resiste em aceitar imediatamente a ideia.

Tendo descoberto a relação de dobro/metade na sequência dos números de caixas, e que a seguir a 16 deve colocar 32, prosseguiu a elaboração da tabela descobrindo que na sequência do número de pastéis também se verificava a relação de dobro/metade e que a seguir a 64 pastéis devia colocar 128.

Na procura de solução para a sua pergunta (a que registou), “Quantos pastéis embalados há em vinte e uma caixas?” a Isabel voltou a mostrar uma visão aditiva da sequência numérica. Para responder ao seu problema, propôs retirar ao número de pastéis em 32 caixas (128 pastéis) a diferença que encontrou entre 21 e 32 caixas.

INV. – . . ., o que é que ficaste a saber em relação ao problema.

Isabel – Ah, que em… em trinta e duas caixas há cento e vinte e oito pastéis embalados.

INV. – Hum, hum. Mas tu queres saber quantos pastéis há...

Isabel – Há em vinte e uma.

INV. – Em vinte e uma caixas.

Isabel – Então tem de ser metade. Não pode ser assim tanto. São trinta e dois… [pausa grande]. São onze. Vinte e um para chegar a trinta e dois são onze. Então temos de tirar a cento e vinte e oito, onze.

Como se pode observar, a Isabel tinha uma ideia de que o problema se podia resolver recorrendo à “relação dentro” (dentro da mesma grandeza, isto é, à relação escalar), mas tinha uma conceção aditiva desta relação. Realmente este procedimento aditivo não é estranho às práticas de sala de aula. Por exemplo, um procedimento veiculado no manual escolar relativo à aprendizagem da tabuada consistia na representação da tabuada numa tabela horizontal com duas linhas, na de cima o multiplicador (1, 2, 3,…) e na de baixo o produto. Sabe-se que uma forma que os alunos usam para encontrar um determinado múltiplo de 4, por exemplo, é contar de 4 em 4. Isto, associado ao uso de tabelas de razão para efetuar multiplicações, pode dar origem a procedimentos incorretos. É de acordo com esse conhecimento que ela formulou a sua pergunta, ainda que tenha dito que escolheu ao acaso o número 21 (em primeiro o 22), como dado para a sua pergunta. No sentido de perceber se teria uma outra ideia para resolver o problema foi-lhe perguntado se precisava de "saber qualquer outra coisa, para ser mais fácil saber quantos pastéis há em 21 caixas". Responde "tenho de saber quantos pastéis há em 20 caixas", mas acaba por reconhecer que também não é fácil conseguir essa informação. Deu-se-lhe então oportunidade para escolher outro número e ela escolheu prontamente sessenta e quatro. A pergunta transformou-se em "Quantos pastéis há em sessenta e quatro [caixas]?" Assim que escreveu a pergunta passou à resolução sem manifestar dúvidas:

> Isabel – 'Em quantas... Quantos [continua em silêncio a escrever a pergunta] Então nós agora sabemos que em trinta e dois há cento e vinte e oito. Então o dobro de trinta e dois é sessenta e quatro. [desenha nova tabela] Tenho de fazer agora o dobro de cento e vinte e oito. Como fiz ali. Que é dois... [murmurando… faz as contas mentalmente]
>
> INV. – Quanto é que é?
>
> Isabel – Duzentos e trinta e seis. [escreve o resultado na tabela]
>
> INV. – Duzentos e trinta e seis? Porquê?
>
> Isabel – Porque oito mais oito é dezasseis.
>
> INV. – Sim.
>
> Isabel – [olha para o resultado] Então tem de ser quarenta e seis.
>
> INV. – Porquê?
>
> Isabel – Não! Tem de ser cinquenta e seis porque o dobro de vinte é quarenta, então nós temos mais dez… é cinquenta e seis.
>
> INV. – Duzentos e cinquenta e seis.
>
> Isabel – Sim. [corrige o número que tinha escrito na tabela]

O número 64 foi escolhido devido à regularidade observada na tabela, o que sugeria o processo de resolução. A pergunta que a Isabel formulou, quer usando o número 22 ou o número 64, estava muito provavelmente, assente na continuidade das sequências presentes na tabela como garantia da resolução do problema. Mas acabou por verificar-se que ela não dominava o recurso à propriedade de isomorfismo da função linear como processo para a resolução. Também não foi capaz de apelar para a relação funcional quando se lhe perguntou do que precisava que a ajudasse a saber o número de pastéis em 21 caixas. Ou seja, ela não expressou o desejo de saber o número de pastéis por caixa quando adiante se deu a oportunidade de fazer outra pergunta sem ser de multiplicação. A Isabel só reconheceu a necessidade de saber quantos pastéis devia colocar em cada caixa quando, mais à frente na entrevista, lhe foi sugerido que se colocasse no lugar do António ajudando realmente a embalar os pastéis, e se lhe perguntou o que necessitava de saber para fazer tal serviço.

INV. – . . . Se fosses tu a embalar os pastéis, o que é que tu precisavas de saber? Estavas tu a embalar os pastéis, a ajudar o teu pai ou a tua mãe...

Isabel – Precisava de saber o número, quantos eram…

INV. – O teu pai pedia-te para arrumares os pastéis nas caixas.

Isabel – Eu tinha de meter, tinha de ver quantas caixas eram precisas, e quantos pastéis eram para meter em cada caixa.

. . .

INV. – Queres saber quantos pastéis há em cada caixa, não é?

Isabel – Sim, podia fazer dezasseis… [pausa] a dividir por quatro?

Tendo feito esta descoberta, que cada caixa embalava quatro pastéis, consegue também dizer como acharia o número de pastéis em vinte e uma caixas.

INV. – Okay, agora já viste que em cada caixa há quatro pastéis. Foi isso que tu escreveste… lê lá a tua resposta.

Isabel – Em cada caixa há quatro pastéis.

INV. – Então… Vamos lá ver. Achas que essa informação te ajuda a saber quantos pastéis há em vinte e uma caixas?

Isabel – Acho, porque quatro, fazemos quatro vezes vinte e um.

Parece então plausível poder afirmar-se que a Isabel, confrontada com um enunciado que, em vez da tabela lhe desse o número de pastéis por caixa, teria formulado a pergunta e respondido sem grandes dificuldades. A dificuldade poderá ter estado, então, na interpretação da tabela, o que levou à escolha de um número pouco ou nada favorável para a pergunta.

Outra problemática relativa à resolução desta tarefa pela Isabel é saber até que ponto ela considerava ter feito uma pergunta cuja resposta se obtinha por meio de uma multiplicação. Esta questão levanta-se por causa da interpretação aditiva da tabela e dos processos aditivos que pretendia usar para resolver a primeira pergunta que formulou. Na entrevista não há dados que possibilitem uma resposta. O único indício que pode apontar para uma hipótese plausível tem a ver com o facto de serem utilizadas em aula tabelas deste género para cálculo de produtos, algo observado em sala de aula, no 3.º ano de escolaridade (ver 8.1.2 Processos de cálculo, pág. 96). Foi depois de ter formulado e respondido à pergunta sobre o número de pastéis embalados em 64 caixas que ela confirmou, não sem alguma hesitação, ter recorrido a uma multiplicação: “É multiplicação, porque é vezes dois.”

O trecho da entrevista que acima se expôs mostra que, pelo menos, confiava de que era capaz de encontrar o resultado mentalmente. Se por um lado pode ser considerado necessário saber o dobro de 8 ou de 16 como um facto numérico, para uma aluna que sentiu dificuldades em encontrar o resultado correto para esses cálculos simples, escolher fazer o dobro de 128 por cálculo mental mostra, no mínimo, alguma confiança, ainda que não o tenha conseguido, dizendo 236. O diálogo que se seguiu mostra que ela não usou o procedimento algorítmico (mentalmente), mas considerou os valores relativos de cada algarismo: não diz que o dobro de 2 é 4, mas que o dobro de 20 é 40; não fez referência a uma dezena que tinha de adicionar a 4 dezenas (depois de fazer 8+8 unidades), mas sim que tinha de juntar 10 a 40. Sobre este cálculo do dobro de 128, resta ainda sublinhar o facto de ter sido pensado aditivamente (8+8; 20+20,…). Ou seja, a Isabel manifestou sempre um certo predomínio do raciocínio aditivo em situações multiplicativas.

8.3.4. A Tarefa: "3×6=18"

A Isabel escolheu, para começar, a expressão 3×6=? mas não é facilmente que consegue formular o problema. Hesita e faz pausas de duração significativa. Faz uma primeira abordagem mas reconhece que não serve: "A Jéssica tem 3 bonecas… [pausa] três bonecas… e comprou… ahh… 6… não. E comprou 6… bonecas? Não, não." Depois de uma nova pausa recomeça: "Pode ser 6, ahhh A Jéssica tem 6 ahh… bonecas, e as suas amigas… [pausa] tem 3 amigas e as suas 3 amigas têm… [pausa] 6… não. Ai!" Com esta última expressão a Isabel recosta-se sorrindo, talvez reconhecendo a dificuldade do processo.

A sua primeira formulação parece inserir-se num contexto de compras. Neste sentido, um dos fatores deveria ser o preço. Na segunda formulação que ensaia é possível descortinar duas situações: na primeira fica-se a saber que a "Jéssica tem 6 bonecas" e que tem 3 amigas; na segunda situação há 3 pessoas (amigas da Jéssica) que têm 6… Neste ponto parece desenhar-se a possibilidade de que este último 6 se referisse a 6 bonecas que teriam cada uma das 3 amigas, mas a Isabel não prossegue nesse sentido.

Tanto na primeira tentativa como na última situação da segunda tentativa, a dificuldade parece centrar-se exatamente na atribuição de um referente que se constitua quantidade intensiva. Para a multiplicação 3×6 num contexto de bens e custo, onde 3 e 6 são dados, um dos dados tem de referir-se a uma quantidade intensiva (custo por unidade). No segundo caso, um contexto de pessoas e bens, se há três pessoas que possuem alguma coisa (6 bonecas), para que a situação seja modelada por 3×6, as 3 pessoas teriam de possuir 6 bonecas cada uma… Nesta situação, à Isabel, só faltava mesmo acrescentar "bonecas cada uma" para que a quantidade (6 bonecas cada uma) fosse intensiva.

Na sua terceira tentativa mostra-se logo de início mais assertiva: “Ah! Já sei. Há uma mesa com seis cadeiras na sala 10. Depois há outra mesa com seis cadeiras na sala 1. E há mais uma mesa com seis cadeiras na sala 4. Quantas cadeiras ao todo são?” Trata-se de uma situação da classe Grupos iguais, pois as salas têm exatamente o mesmo número de cadeiras, mas cujo enunciado é expresso de um modo claramente aditivo. A própria Isabel reconhece o facto.

INV. – […] Isto pode ser resolvido com três vezes seis, não é?

Isabel – Ou seis vezes três.

INV. – Ou seis vezes três. E até sem multiplicar se consegue resolver este problema.

Isabel – Pois… consegue.

INV. – Como?

Isabel – Juntando as cadeiras

INV. – Sim?

Isabel – Seis mais seis mais seis.

Este caráter aditivo do problema que formulou torna mais verosímil pensar que a dificuldade da Isabel está mesmo em definir uma quantidade intensiva para um dos fatores da multiplicação. Mais à frente, a entrevista volta a debruçar-se sobre a formulação de um problema para 3×6=? e ao recordar-se de um problema formulado anteriormente, ela é capaz de melhorar o problema inicialmente formulado, alterando o enunciado para uma formulação onde a quantidade intensiva aparece mais claramente.

INV. – […] Vamos aqui voltar atrás, a este que é o 3×6 =?. Tu formulaste… tu, há dias, inventaste para a Micaela (uma colega da turma) um problema muito simples, com números muito simples. Ainda te lembras do problema?

Isabel – Era qualquer coisa de bonecas que custavam três euros e que havia seis bonecas, acho eu, e ela tinha de saber quanto tinham custado as bonecas todas.

Quando lhe é pedido para comparar este problema com o que formulou inicialmente, a Isabel mostra-se consciente das fragilidades do contexto do primeiro problema:

INV. – Muito bem. O que é que achas deste em relação ao outro que tu fizeste. O das mesas comparado com este.

Isabel – É assim… eu acho que este está melhor [refere-se ao da compra de bonecas].

INV. – Porquê? O que é que tu não achas bem no problema das mesas?

Isabel – Ahh… Uma mesa tem seis cadeiras na sala dez. Ahh… eu acho que “sala dez”, “sala um” e “sala quatro” saíam. Eu acho que ficava melhor assim: seis cadeiras em cada sala, depois quantas cadeiras ao todo são em cada sala.

INV. – Em cada sala?

Isabel – Não, quantas cadeiras ao todo são.

Neste diálogo, ao afirmar que ficava melhor dizer “6 cadeiras em cada sala”, está a transformar a quantidade extensiva “6 cadeiras”, presente no seu enunciado original, numa quantidade intensiva “6 cadeiras em cada sala”.

Para a expressão ?×6=18 a Isabel faz duas tentativas sem sucesso e mostra-se incapaz de prosseguir sem ajuda.

Isabel – Ah! Eu posso dizer assim. Há dezoito meninas ou meninos numa sala e há seis professores. [pausa] Hum, não. Não pode ser assim. Eu acho que pode ser: dezoito carros de brincar e há seis bonecas. Quantos meninos vão brincar com isso? Pode ser assim? Eu acho que não. Quer dizer, não sei.

Para fazer face a esta resignação da aluna na formulação do problema para a expressão ?×6=18, o diálogo prossegue colocando a Isabel perante um tipo de tarefa diferente. Em vez desta tarefa, à qual está associado o processo cognitivo *Compreender*, propôs-se-lhe que descobrisse a pergunta para uma situação que lhe é apresentada. Trata-se de uma tarefa mais estruturada. A este tipo de tarefa está associado o processo cognitivo *Editar* o que quer dizer que lhe é pedido que formule uma pergunta a partir de informações (dados e condições) que lhe são previamente fornecidas.

INV. – Vamos ver, eu vou inventar um problema sem a pergunta e tu vais descobrir uma pergunta, *okay*? Faz de conta: o Pedro tem um número de canetas e a Isabel tem 18 canetas, que são o sêxtuplo das canetas do Pedro. Qual seria a pergunta que tu poderias fazer?

Isabel – Quantas canetas tem o Pedro.

INV. – Muito bem, e como é que ias saber esse número de canetas?

Isabel – Dividindo.

INV. – Dividindo o quê?

Isabel – O dezoito a dividir por seis.

INV. – Que dá?

Isabel – Dá três.

A situação apresentada enquadra-se na Comparação multiplicativa sendo modelada por uma divisão com sentido de partilha equitativa de acordo com Greer (1992). É dado o produto, que é uma quantidade extensiva, e a razão (quantidade intensiva) que compara multiplicativamente o número de canetas dos dois personagens presentes na situação. A aluna faz a pergunta adequada e mostra que sabe resolvê-la.

Após esta intervenção volta-se novamente a atenção para a criação dos problemas para as expressões numéricas, agora para a expressão 3×?=18. Tal como seria natural esperar, a Isabel faz uma tentativa construída a partir da que lhe foi proposta antes mas, mesmo assim, não consegue ser clara e assertiva. Transcreve-se a seguir o ensaio que ela fez, mas retirando partes do texto pouco significativas e que apenas perturbam a leitura do enunciado. Para facilitar a análise, o texto foi dividido em seis afirmações que estão identificadas com um índice no início de cada uma.

> [1]A Mariana tem três livros ... e [2]a Inês não sabe quantos tem . . . [3a]sabemos que o número que a Inês tem é o triplo… [3b]não… [4]sabemos que o número que a Mariana tem é o triplo da Inês. [5]Ao todo as duas têm 18 livros. [6]Quantos livros a Inês tem?

Como se pode observar na afirmação 5, o produto da multiplicação volta a assumir o caráter de uma reunião de dois conjuntos distintos, o que é uma característica originária de um pensamento aditivo aprendido antes da multiplicação. Também nas afirmações 1 e 2 se reconhece que os dois fatores são quantidades extensivas e que, se a estas duas afirmações, se seguissem à afirmação 5 e à pergunta em 6, constituiriam um problema de estrutura aditiva modelado por uma subtração em que sabendo o todo e uma das partes se pretende saber a outra parte… As afirmações 3a, 3b e 4 são as que traduzem a intenção de conferir um sentido multiplicativo ao problema através da caracterização do fator em falta como sendo o resultado de uma multiplicação.

Na afirmação 1, o fator 3 é tomado como quantidade extensiva, correspondendo ao número de livros que a Mariana tem, mas pela afirmação 3a é tomado como operador, quando corresponde à relação que descreve quantas vezes mais livros tem a Inês que a Mariana. Esta ambiguidade é inaceitável pelo que a Isabel tenta corrigir por meio das afirmações 3b e 4. Na continuação do diálogo volta atrás na correção.

> INV. – Vamos ler isto desde o início para ver se faz sentido. A Mariana tem três livros e a Inês não se sabe quantos tem. Sabemos que o número que a Mariana tem é o triplo da Inês.
>
> Isabel – Não. A Inês é que tem o triplo da Mariana.
>
> INV. – Então e agora. Vamos ver uma coisa. Dizes que a Mariana tem três livros e que a Inês tem o triplo da Mariana. Então podes saber quantos livros tem a Inês, ou não?
>
> Isabel – Temos de dividir dezoito por três… porque são todos os livros que elas têm a dividir pelos da Mariana para saber os da Inês.

Esta parte do diálogo mostra claramente que a Isabel estava convencida da utilização da operação inversa da multiplicação para achar o valor em fala. Do ponto de vista do cálculo está correto. Mas do ponto de vista do contexto confirma-se o caráter aditivo da situação. A situação resolve-se por uma operação inversa, que do ponto de vista do contexto criado é uma subtração. A Isabel centrou-se no cálculo e não se mostrou capaz de adequar o contexto.

A partir daqui a entrevista prossegue procurando criar situações de sucesso para a Isabel. Pegou-se no problema do qual se lembrava de ter formulado para a colega Micaela (acima já referido) e pediu-se-lhe que formulasse um problema parecido. A Isabel disse: “A Rita comprou 3 bonecas… e cada boneca custava seis euros. Quanto dinheiro é que ela gastou?” Este enunciado foi traduzido para o papel na seguinte forma:

3 bonecas × 6 € cada boneca = 18 €

Colocando junto desta expressão uma das que tinha um fator em falta, pediu-se que identificasse o dado em falta e que formulasse o problema correspondente. Por exemplo:

> INV. – . . . Então agora vamos ver este cartão, com esta conta [?×6=18]. O que é que não se sabe aqui?
>
> Isabel – O número de bonecas.
>
> INV. – O número de bonecas. Então, o problema seria…
>
> Isabel – Então… A Rita gastou dezoito euros em bonecas. Cada boneca custava seis euros. Quantas bonecas há?
>
> INV. – Quantas há? Se ela…
>
> Isabel – Comprou… quantas bonecas comprou.

A evocação do problema já conhecido, o seu registo e respetiva utilização para raciocinar sobre o mesmo contexto, facilitou certamente a formulação. Ainda assim, resta a dúvida se em contextos de bens e custo é mais fácil criar situações multiplicativas.

Questionada sobre o que tinha achado de toda a atividade, a aluna reconheceu que não foi fácil. Que os problemas eram fáceis de resolver, mas que tinha sido difícil inventá-los. Incentivada a justificar-se, diz que prefere problemas com números maiores.

> INV. – Porque é que tu achas que isto foi difícil de inventar?
>
> Isabel – Porque eram contas fáceis, se calhar.
>
> INV. – Achas?
>
> Isabel – Eu acho, porque quanto mais fácil é mais difícil é… porque é assim… porque eu escolho números grandes para não me baralhar… porque se eu escolho números pequenos eu baralho-me.
>
> INV. – Mas baralhas-te em quê?
>
> Isabel – Porque… sei lá… não sei.

Não se pode reconhecer grande consistência a esta justificação, até porque é acompanhada de uma explicitação de dúvida e desconhecimento. Mais adiante inventa, como exemplo, um problema de Comparação multiplicativa com números na ordem das centenas onde o que não se conhece é o produto.

Isabel – . . . Há duzentos e sessenta e três brincos na caixa da Maria. E as amigas compraram quinhentos e vinte e nove brincos… não. Compraram quinhentos e vinte e nove vezes mais os brincos que ela tinha. Quantos brincos têm elas?

INV. – Então, mas tu não podias ter feito aqui o mesmo com estas contas que tínhamos aqui?

Isabel – Podia.

Como se pode verificar, nas primeiras duas frases do enunciado mostra novamente o mesmo tipo de raciocínio aditivo que mostrou no início da entrevista. Além disso a pergunta deixa em dúvida se o pronome "elas" se refere às amigas ou a todas, amigas e Maria.

Fazendo uma síntese, a Isabel começou por mostrar-se hesitante na formulação de um problema para a primeira expressão que seleciona (3×6=?). Acabou por formular um problema cuja situação se enquadra na classe Grupos iguais, ou seja, uma multiplicação com um sentido de adição repetida de parcelas iguais. Em todas as situações que tentou formular para as outras expressões numéricas com um fator em falta mostrou indícios de raciocínio aditivo e não teve sucesso na formulação. Coloca-se assim a hipótese de que as suas dificuldades se relacionem com a atribuição de um referente que seja uma quantidade intensiva a um dos fatores da multiplicação. Contudo, deu sinais de saber resolver tanto situações de Grupos iguais como as de Comparação multiplicativa. Isto verificou-se em tarefas de formulação de problemas nas quais teve de formular perguntas a partir de dados fornecidos num contexto.

8.3.5. A Tarefa: "Caixas de gelados"

Na resolução desta tarefa (Figura 18, na pág. 88), a Isabel não formulou todas as suas perguntas de uma só vez logo no início. Com exceção da primeira, as outras três perguntas foram obtidas ao longo da entrevista após incentivos e discussão de aspetos ligados à interpretação do enunciado. Na lista das perguntas que se apresenta de seguida estão entre parênteses reto as que formulou posteriormente.

1) Se ele levasse 12 caixas do supermercado, quanto gastaria e quantos gelados levaria?
2) [Quanto custa só um gelado e quantos gelados leva cada caixa?]
3) [Se não houvesse promoção quanto custaria uma caixa de gelados?]
4) [Se não houvesse promoção quanto custaria um gelado?]

Em rigor, a Isabel dá por concluída a tarefa logo depois da primeira pergunta, que se desdobra em duas, deixando explícito que não consegue pensar em mais. Sugere-se-lhe que pense em informações que gostasse de saber e que não são ditas no texto, com a intenção de a fazer pensar do ponto de vista da realidade. Mesmo assim a Isabel não avança. Pergunta-se-lhe então se conseguiria saber o número de gelados por caixa. Imediatamente a Isabel faz a sua segunda pergunta, que mais uma vez se desdobra em duas, uma das quais corresponde à sugestão que lhe foi dada "Quanto custa só um gelado e quantos gelados leva cada caixa?". Há um novo impasse e a terceira e quarta perguntas só aparecem depois de um diálogo sobre o interesse real das promoções.

INV. – Vê lá se ainda há aí mais perguntas. [pausa] Tu não costumas ir às compras?

Isabel – Mais ou menos, às vezes.

INV. – E já viste o que é que acontece quando há uma promoção?

Isabel – Ah! Já sei! Se não houvesse promoção quanto é que custaria?

É com esta descoberta que surgem as duas últimas perguntas. Nascem da tomada de consciência do efeito promocional. Significa que a pergunta que incide sobre o custo de um gelado, que não especifica o efeito promocional, supõe o preço com a promoção. Assim também o fez a Madalena. O Daniel formula a mesma pergunta mas considera o efeito da promoção. O Ricardo é o único que, na mesma pergunta, é explícito em saber o custo sem a promoção.

A sua primeira proposta envolve a multiplicação e a Isabel ficou por aí. As questões que envolvem a divisão surgem, primeiro, da sugestão de que pode saber o número de gelados em uma caixa, segundo, do diálogo sobre o que acontece quando há uma promoção

Na formulação da sua primeira pergunta, a Isabel escolhe 12 para o número de caixas sobre o qual pretende saber o custo. Isto é significativo. Se tivesse escolhido outro número que não fosse múltiplo de 6, a resolução do problema passaria pela utilização de mais do que uma operação. Depois de feita esta pergunta, a Isabel mostra dificuldade em pensar em perguntas de outro tipo, explicando "Porque eu acho que é só assim as perguntas que podemos fazer, com números só assim. Só podemos mudar os números, eu acho que é assim."

Mais à frente, na entrevista, foi questionada sobre a dificuldade em fazer mais perguntas.

INV. – Dessas todas qual é que foi para ti a mais fácil de fazer?

Isabel – Esta. [aponta a primeira]

INV. – A primeira não é?

Isabel – É, é muito mais fácil.

INV. – E porque é que tu achas que essa é muito mais fácil?

Isabel – Porque é só, ahh, este multiplicamos por 2 dá 12. Depois temos que meter isto a multiplicar por 2. É a mesma coisa.

INV. – Depois de teres feito essa pergunta, disseste que não conseguias fazer perguntas diferentes, que só conseguias se escolhesses números diferentes. Que números podias pensar?

Isabel – Podia pensar… multiplicava por 3… dava 18…

INV. – E então?

Isabel – Perguntava se ele levasse 18.

Quando, acima, a Isabel diz “Depois temos que meter isto a multiplicar por 2” está a referir-se ao custo das 6 caixas, e acrescenta “É a mesma coisa”, afirmação esta que permite observar a capacidade de determinar o quarto termo recorrendo ao escalar que relaciona dois valores dentro da mesma grandeza, isto é, sabendo que para obter o número de 12 caixas duplicou as 6 caixas, conclui que o custo será também multiplicado por 2. O diálogo acima também mostra que a seleção do número 12 para figurar na pergunta não foi por acaso. Entretanto, quando resolve a pergunta, que tem duas partes, recorre, de imediato, ao escalar para determinar o custo das 12 caixas, mas hesita na sua utilização para responder à segunda parte da pergunta (…e quantos gelados levaria?). Manifesta inicialmente que tem primeiro de saber o número de gelados de cada caixa. Este é outro processo viável. Calcular o número de gelados por caixa é determinar relação funcional, a constante de proporcionalidade, para depois multiplicar pelo número de caixas, encontrando assim o número de gelados nas 12 caixas.

Isabel – … Então, mas eu já sei quanto custa. Que é, ele custa catorze e quarenta. Pronto. Os doze, as doze caixas, mas agora está a perguntar quantos gelados levaria? Temos de ver quanto é que é numa caixa.

INV. – Hum hum.

Isabel – Então, ahh, mas podemos logo fazer nas doze.

INV. – Hum hum.

Isabel – Em vez de fazer nas seis, podemos logo fazer nas doze. Temos doze a dividir por seis! Ah não! A dividir por seis não.

INV. – Hum

Isabel – Vinte e quatro! Temos de ver vinte e quatro vezes dois...

Este diálogo permite observar que a Isabel sabe, pelo menos, que tem de dividir para saber o número de gelados por caixa, mas não parece segura quanto aos dados que deve usar para obter essa informação. Vergnaud (1883) considera que é mais tardio o domínio deste último processo. No entanto, é um processo que é muito veiculado no ensino: determinar primeiro o valor por unidade e multiplicar depois pelo número de unidades. Entretanto, estes alunos aprenderam e usaram, durante muito tempo, tabelas de razão para resolver problemas de proporcionalidade usando relações escalares. Daí, talvez, decorre o que se observa no comportamento da Isabel: parece saber que pode usar a divisão para saber o número de gelados por caixa e multiplicar depois por 12 caixas, mas, tendo dúvidas no modo de o fazer, recorre ao que domina melhor, multiplicar pelo escalar que já encontrou.

A segunda pergunta tem duas partes: a primeira questiona sobre o preço de um gelado, e a segunda pretende saber o número de gelados em cada caixa. A Isabel começa pela segunda parte, determinando o número de gelados por caixa, mas agora não manifesta qualquer hesitação na seleção do dos dados: divide os 24 gelados pelas 6 caixas. No entanto a seleção do processo para determinar o custo de cada gelado passou por várias propostas, revelando dificuldade em identificar e relacionar os dados. Parece estar condicionada pelo facto de ter achado o número de gelados numa caixa. Primeiro propõe-se dividir 1 por 4, dizendo que 1 corresponde a uma caixa e 4 aos gelados dentro da caixa.

INV. – O que é que é esse um e o que é que é esse quatro?

Isabel – É um, é uma caixa. E são quatro gelados.

INV. – E é uma caixa a dividir por quatro gelados?

Isabel – Não...

INV. – Então?

Isabel – Vinte e quatro a dividir por quatro. Porque são os vinte e quatro, um, uma… Ah, não! Uma caixa leva quatro gelados.

INV. – Tu sabes o preço de quê?

Isabel – Eu sei o preço das seis caixas.

INV. – Hum, hum. E então?

Isabel – Hum. Tem de ser sete vírgula vinte a dividir por seis! Não é? É. [começa imediatamente a resolver a operação]

Quando terminou o cálculo (7,20÷6) afirmou, erradamente, que o resultado encontrado era o preço de um gelado. Foi-lhe pedido que tomasse atenção à natureza do que estava a dividir. Reconheceu que estava a dividir o custo pelas 6 caixas e emendou, dizendo que encontrou o custo de cada caixa. Tendo isto sido sublinhado, avançou, propondo então dividir o custo de uma caixa pelos 4 gelados que ela contém, e conseguiu encontrar o resultado.

As situações críticas deste episódio podiam ser vistas como meras distrações. No entanto, é possível subentender um outro sentido plausível. A proposta de divisão de uma caixa por 4 gelados é coerente com o facto de não conhecer ainda o preço de uma caixa, isto é, “uma caixa” corresponderia a dizer “o preço de uma caixa”. Depois de ter feito a operação que lhe dá o preço de cada caixa, diz, questionada pelo investigador, ter encontrado o preço de um gelado, o que corresponde ao objetivo inicial. Reconhecendo, finalmente, que tem os dados que lhe faltavam (o número de gelados por caixa e o custo de uma caixa), consegue chegar ao resultado pretendido fazendo a divisão.

No diálogo acima, à pergunta "Tu sabes o preço de quê?" que lhe é feita, responde que sabe o preço das 6 caixas, mas podia ter dito que sabia o preço dos 24 gelados, e isso conduziria a uma outro modo de resolver o problema, dividindo 7,20 por 24. O diálogo e a resposta que deu reforçou o processo de determinar o custo do gelado a partir do custo da caixa.

Na resolução do problema colocado pela terceira pergunta, pode ver-se que não está segura na interpretação da condição promocional.

Isabel – [Lê a pergunta] 'Se não houvesse promoção, quanto custaria uma caixa de gelados?' Então, ele diz: leve três caixas e pague duas. Hum… [Pausa] Isto tudo era com promoção.

INV. – Tudo, até agora, era com promoção.

Isabel – Então, ahh, ele levou seis caixas por sete vírgula vinte. Ahh, se não houvesse, se só pagasse, se ele pagasse três tinha de pagar mais.

INV. – É?

Isabel – É! É a promoção, leve três pague duas. Eu acho, eu acho que ele paga mais.

INV. – Se ele levasse três pagava duas...

Isabel – Então ele não paga a terceira!

INV. – Mas ele não trouxe três.

Isabel – Ele trouxe seis.

INV. – Pois, se ele trouxe seis, então…

Isabel – Paga quatro!

INV. – Porquê?

Isabel – Porque, ahh, é o dobro.

O diálogo revela um conflito. A Isabel sabe que numa promoção se paga menos do que se paga quando não há promoção. A expressão "leve três e pague duas" é apenas um modo, entre vários, de exprimir a promoção. O conflito tem a ver com a inversão da promoção. A Isabel sabe que retirar a promoção significa pagar mais, mas revela dúvida quanto ao modo de interpretar os dados para operar. O momento crítico em que se pode depreender que descobre o que fazer é quando diz "Então ele não paga a terceira!". A descoberta do que foi efetivamente pago conduziu, logo a seguir, à operação de dividir 7,20€ por 4.

Tendo determinado o custo da caixa sem promoção, a resolução da quarta pergunta não ofereceu dúvidas. Soube selecionar o custo da caixa sem promoção, aquele que tinha acabado de determinar, para o dividir pelos gelados de uma caixa. A Isabel mostrou um bom conhecimento dos procedimentos de cálculo, não tendo dificuldades na realização dos algoritmos das operações.

8.3.6. Síntese

As três tabelas que se apresentam nesta secção sintetizam os resultados obtidos no caso da Isabel. Os resultados exibidos contribuem para a resposta às questões do estudo e são aqui comentados.

Na primeira tabela (Tabela 11, na pág. 145) estão as opiniões da Isabel, o que ela percecionava relativamente ao seu desempenho e qual era a visão dos seus colegas participantes neste estudo, as suas preferências no que respeita às matérias de estudo e o que pensava globalmente sobre a resolução e formulação de problemas.

Relativamente ao desempenho, ela foi assertiva em colocar-se entre os alunos que não eram nem os melhores nem menos bons, mas os médios. E colocou a seu lado o Ricardo que também participou no estudo. No entanto, tanto o Daniel como a Madalena e o Ricardo colocaram a Isabel entre os que têm mais dificuldades. Percebe-se assim que a Isabel tinha de si uma opinião mais positiva que os seus colegas.

Quanto às suas preferências, a Isabel colocou a Matemática em segundo lugar e, dentro desta, preferia o trabalho com Organização e Tratamento de Dados em detrimento da Geometria e da Medida, assim como preferia os cálculos à resolução de problemas, com exceção das operações de dividir, na altura em que foi entrevistada (1.º período do 4.º ano).

Os seus gostos e desgostos em matérias escolares parecem estar ligados ao sucesso que neles consegue obter. Nesta linha, ela fez uma afirmação esclarecedora quando se referiu à resolução de problemas, assumindo que gostava dos problemas que resolvia bem. Ainda assim ela não foi capaz de evocar algum problema que tenha gostado de resolver, a não ser um que disse ter inventado no decurso da resolução de uma tarefa do livro de fichas, o qual propunha a invenção de um problema para uma expressão de multiplicação. Verificou-se entretanto que cometeu o mesmo erro que tinha cometido quando formulou, no 3.º ano, o problema para a expressão 30×25. Ela formulou um contexto dentro da categoria da Comparação multiplicativa, mas a pergunta exigia que a resolução passasse também pela adição do produto ao multiplicando.

Quanto à formulação de problemas, a Isabel associou-a essencialmente ao treino da matéria ensinada, algo que parece estar fundamentado na prática de aula. Achava "giro", mas depois afirmou que preferia resolver a inventar. E se fosse para inventar preferia inventar livremente. Pode levantar-se a questão se esta preferência terá algo a ver com eventual insucesso na formulação de problemas para expressões numéricas, que foi sentido nas entrevistas, tendo depois sido justificado dizendo que inventando livremente, formulava problemas para os quais sabia a resposta.

Tabela 11: Resumo dos resultados relacionados com opiniões e conceções da Isabel sobre o desempenho, as matérias escolares, a resolução e a formulação de problemas.

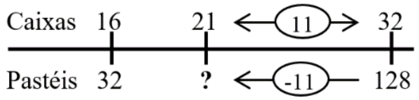
	Considerações explícitas da aluna	Observações
Desempenho	Considera-se entre os alunos médios, a par do Ricardo.	O Daniel coloca-a entre os alunos menos bons *porque se engana nas contas*. A Madalena e o Ricardo consideram que ela está entre os alunos com dificuldades.
Preferências	Prefere o Português à Matemática.	O seu desgosto pela divisão parece estar ligado ao insucesso que tem nesse tópico.
Temas	Gosta mais de OTD[26] e menos de Geometria e Medida.	
Tópicos	Gosta mais de *contas* do que de problemas. Não gosta das *contas* de dividir. Aponta os números, as operações e as frações como aprendizagens significativas	
Resolução de problemas	"Gosto dos problemas que resolvo bem." Não consegue recordar-se de nenhum problema que tenha resolvido. Recorda um que tinha formulado recentemente para a expressão 806×84: "Uma menina tinha 806 livros e deram-lhe 84 vezes mais. Quantos livros é que a menina tem?"	Este problema que recorda (out. 2014) ter inventado tem um sentido semelhante (multiplicação por um escalar: 'ter tantas vezes mais') ao que inventou para a tarefa de formulação a partir da expressão 30×25 (mai.2014), e enferma do mesmo erro, exigindo a adição do produto ao multiplicando.
Formulação de problemas	Acha que é "giro" inventar problemas. Prefere resolver a inventar. Prefere inventar sem constrangimentos. Assim inventa problemas que já sabe a resposta. Acha que é uma maneira de treinar, de pensar o que os professores ensinaram.	A conceção da formulação de problemas como um treino parece estar ligada à rotina praticada na sala.

[26] Organização e Tratamento de Dados

Tabela 12: Síntese dos resultados obtidos da Isabel nas tarefas de formulação baseadas em expressões numéricas e no problema de formulação livre.

Tarefa	Enunciado	Sentido do contexto	Formulação	Resolução	Anotações
“30×25” 2014 maio 16	“A Joana tinha 25 balões e o amigo tinha 30 vezes mais balões. Ao todo, quantos balões os dois têm?”	Comparação multiplicativa (multiplicar por um escalar) seguido de adição parte-parte-todo.	A partir de outro que terá formulado anteriormente.	Algoritmo. A operação que resolve o problema é 25+30×25.	A adição do produto ao multiplicando repete-se mais tarde, em outubro (4.º ano) num problema que diz ter formulado no livro de fichas.
“Livre” 2014 outubro 23	“A Margarida tinha 103 brinquedos. Deram-lhe mais 375 brinquedos. Depois tiraram-lhe 50 brinquedos. Quantos brinquedos tem agora?”	Juntar / Retirar (adição / subtração)	Formulou este porque tinha adições e subtrações, operações de que gosta mais.	Algoritmos. Resolução correta sem mostrar hesitações.	
“3×6=18” 2014 dezembro 2	3×6=? “Há uma mesa com seis cadeiras na sala 10. Depois há outra mesa com seis cadeiras na sala 1. E há mais uma mesa com seis cadeiras na sala 4. Quantas cadeiras ao todo são?” ?×6=18 — 3×?=18 “A Mariana tem três livros . . . e a Inês não sabe quantos tem . . . sabemos que o número que a Inês tem é o triplo… Ao todo as duas têm 18 livros. Quantos livros a Inês tem?”	Grupos iguais (multiplicação num contexto aditivo)	Fez previamente três tentativas goradas para a formulação deste problema. Faz duas tentativas que reconhece não serem válidas. Tentativa de imitação da situação discutida previamente.	—	Com exceção da situação criada para a expressão 3×6=?, recorreu a contextos de Comparação multiplicativa nas tarefas de formulação para as expressões 30×25 (3.º ano)e para 806×84 (4.º ano). Na última entrevista diz que não gosta de inventar para expressões de multiplicação, recordando explicitamente esta tarefa (“3×6=18”).

Tabela 13: Síntese dos resultados obtidos da Isabel nas tarefas de formulação baseadas em contextos.

Tarefa	Comentário ao enunciado	Perguntas enunciadas	Formulação	Resolução
“Caixas de Pastéis”	Questiona se resolve primeiro ou se faz primeiro a pergunta.	Oral~: “Se fosse 22 caixas, quantos pastéis embalados havia?”	A pergunta nasce da interpretação da progressão da sequência numérica do número de caixas e de pastéis.	
2014 outubro 9	Afirma que a sequência do número de caixas progride de 4 em 4 e que progride de 6 em 6 a do número de pastéis.	Escrita: “Quantos pastéis embalados há em 21 caixas?” (altera[27] o número quando escreve a pergunta)	Interpreta aditivamente a progressão e seleciona o número 22 caixas por ser +6 que 16 caixas.	Depois de saber que em 32 caixas há 128 pastéis propõe retirar, a 128 pastéis, a diferença entre 21 e 32 caixas. 
“Caixas de Gelados” 2015 janeiro 6	—	“Se ele levasse 12 caixas do supermercado, (a)quanto gastaria e (b)quantos gelados levaria?”	Considera que não pode fazer mais perguntas a não ser alterando os números da pergunta que fez. Pensou no que levaria se fosse às compras. Pensou nas *contas* que tinha de fazer.	a) 2×7,20=14,40 →Multiplica por 2 porque 12 caixas é o dobro de 6 caixas. Recurso ao escalar. b) 2×24=48 →Recorre ao escalar como fez ao custo das 12 caixas, mas antes esteve tentada a saber o número de gelados por caixa.

[27] Por distração? Por esquecimento?

A segunda tabela que se expõe nesta secção destinada à síntese dos resultados da Isabel (Tabela 12, na pág. 146) resume os resultados referentes às entrevistas com as tarefas associadas ao processo *Compreender* e à formulação livre de um problema. Na primeira coluna está o enunciado inventado; na segunda o sentido do contexto de acordo com Greer (1992); na terceira coluna, designada Formulação, está a indicação da origem do problema, i.e., o que esteve na base da formulação; na quarta coluna é revelada o modo de resolução, que só faz sentido ser apresentado para a resolução da expressão 30×25 e para a resolução do problema formulado livremente; na última coluna estão anotações sobre algum aspeto relevante.

Há indícios que pode levar a se considerar que dentro dos *esquemas* para resolver situações de multiplicação, a Isabel mostrava fragilidades aparentemente associadas: as relações de parte-todo das estruturas aditivas e as situações de comparação multiplicativa, mais especificamente em casos de multiplicação por um escalar. Isto é visível na formulação que ela fez para as expressões 30×25 e 806×84[28]. Uma das características do enunciado inventado que o aproxima das estruturas aditivas é o facto de, tanto num como no outro, o problema inventado não se resolver apenas com a multiplicação apresentada, mas ser necessário adicionar o produto ao multiplicando que foi estabelecido no enunciado formulado. Sublinha-se acima a veiculação à multiplicação por um escalar, isto é, os casos em que é preciso determinar o produto, porque, em verdade, não se sabe até que ponto ela era capaz de lidar com situações que implicassem a divisão dentro da mesma classe de situações, isto é, situações em que é necessário determinar o escalar, ou situações em que, dando o escalar e o produto ela fosse capaz de obter o multiplicando. Repare-se nas tentativas falhadas para formular contextos para as expressões "3×?=18" e "?×6=18" (Tabela 12), assim como na pergunta que inventou para a tarefa "Caixa de Gelados" (ver Tabela 13, na pág. 147), na qual, querendo saber o custo de 12 caixas de gelados, a resolução foi obtida pela multiplicação por um escalar[29]. Este processo está muito bem, mas tem de ser contado como mais um indício do que se disse acima. O único problema que formulou para uma expressão de multiplicação que não se vincula à multiplicação por um escalar foi o que inventou para a expressão 3×6=18. Mas repare-se como o enunciado denuncia uma situação de Grupos iguais dominada pela adição, característica que poderia ter sido ultrapassada constituindo um dos fatores como quantidade intensiva (Schwartz, 1988), especificamente "6 cadeiras por sala". Falta ainda notar que o visível predomínio da estrutura aditiva está também revelado no problema formulado livremente e a seu gosto por ter adição e subtração,

[28] A que disse que estava no livro de fichas.

[29] Deve-se chamar a atenção para o pormenor na apresentação dos resultados, pois na resolução desta questão que a Isabel formula, na parte da pergunta que incide sobre o número de gelados, ela manifesta a tentação de recorrer ao número de gelados por caixa, mas não o faz, voltando a usar o escalar (dobro).

operações de que gostava. Alinhada com este dado está a afirmação de que gostava de inventar livremente porque inventava problemas que era capaz de resolver.

Na Tabela 13 estão os resultados essenciais referentes às tarefas associadas aos processos *Traduzir* e *Editar*, respetivamente, as tarefas "Caixas de Pastéis" e Caixas de Gelados".

A tabela apresenta na primeira coluna, "Comentário ao enunciado", que se refere ao que o aluno disse ou fez logo após a leitura do enunciado da tarefa. Isto é significativo porque se verifica que tem relação com as perguntas formuladas e com o processo de formulação. Na segunda coluna estão as perguntas formuladas, apenas aquelas que foram feitas antes de qualquer intervenção do investigador. A terceira coluna refere-se à origem ou processo de formulação. Na quarta coluna está o processo de resolução.

No que respeita à última, estão presentes na tabela apenas as perguntas[30] que formulou antes de qualquer contribuição do investigador, por mínima que fosse. São estas as perguntas que melhor informam sobre o processo de formulação, no que de mais genuíno possui. E o que é visível sobre este processo é como está dependente da interpretação dos dados presentes no enunciado e no processo de resolução que ela antecipou, independentemente se tal interpretação ou resolução é correta ou não. Sobre isto pode-se considerar significativa a dúvida que colocou ao investigador, se *resolvia primeiro* ou se *perguntava primeiro*.

Chama-se a atenção para o facto de, concordando com o que acima se disse sobre o predomínio da estrutura aditiva sobre a multiplicativa, tal ser visível na forma como a Isabel interpretou aditivamente a progressão dos dados presentes na tabela do enunciado da "Caixa de Pastéis". Não só o número que integrou na sua pergunta é resultado de uma adição, como a processo de resolução que predominou foi aditivo sem respeito pela propriedade do isomorfismo (Vergnaud, 1983), na medida em que quis resolver o problema sobre o número de pastéis em 21 caixas, subtraindo na grandeza "pastéis", a diferença que verificou na grandeza "caixas".

Outro dado importante a considerar, no que se refere ao processo de formulação das perguntas, é o facto da pergunta inventada na tarefa "Caixas de Pastéis" ter uma resolução possível, apesar de a pergunta ter nascido de uma má interpretação dos dados e tenha sido tentada uma resolução errada. A resolução possível seria recorrer à resolução funcional (4 pastéis/caixa). Esta observação tem importância para discutir a relação entre o conhecimento matemático revelado na pergunta formulada e o conhecimento matemático revelado na resolução do problema.

[30] No plural porque são duas questões numa só frase interrogativa.

8.4. O caso da Madalena

8.4.1. Características pessoais

<u>Com quem vive e estuda</u>

A Maria vivia com os pais embora o pai estivesse a trabalhar fora do país regressando a casa por curtos períodos. Não tinha irmãos ou irmãs.

Geralmente fazia sozinha os trabalhos que levava para fazer em casa. Só quando eram trabalhos muito complicados é que pedia ajuda à mãe. Se fossem problemas de Matemática, costumavam resolver as duas isoladamente e só no fim é que comparavam as resoluções. À sexta-feira, quando tinha natação, ia para casa das tias e fazia lá os trabalhos de casa. Mas sobre os trabalhos de casa dizia "só me apetece acabar aquilo para ir ver televisão".

<u>O gosto pela Matemática</u>

O pai gostava mais de Matemática do que a mãe que preferia História. Quanto a si mesma dizia "gosto muito de Matemática mesmo" porque "é uma coisa que puxa mais por mim".

De entre os três temas matemáticos do currículo, gostava mais dos Números e Operações e menos da Geometria. Preferia os problemas com *contas* porque se sentia muito à vontade a fazê-las.

Não achava piada aos problemas com gráficos. O que gostava mais em Matemática era resolver problemas. Não gostava muito de explicar como tinha pensado na resolução de um problema porque "há partes em que a gente não pensou, mas depois… para os outros conseguirem entender… temos de explicar essas partes". Ela achava que os seus raciocínios eram fáceis mas compreende que podiam ser difíceis para outras pessoas. Mas "ajeito-me bem", dizia, a explicar os raciocínios numa prova.

<u>O desempenho em Matemática</u>

Considerava que o Daniel era o melhor aluno na resolução de problemas. Outros alunos muito bons eram a Francisca, o Miguel e a Rita.

Colegas que não pertenciam ao grupo dos melhores mas que também eram bons eram o Guilherme e a Carina. A Isabel e o Ricardo estavam, na sua opinião, entre os alunos que tinham dificuldades. Quanto a si mesma colocava-se entre o Daniel e a Francisca.

Na entrevista realizada no 3.º ano, a Madalena achava como mais importante a aprendizagem que tinha feito dos algoritmos.

> Houve uma coisa que gostei muito de aprender, . . . quando vim para aqui, no 1.º ano, . . . que [já me] tinha[m] falado dos algoritmos, e andava sempre numa

> grande ansiedade de aprender os algoritmos. Eu senti-me muito bem . . . quando aprendi a fazer os algoritmos. Porque os algoritmos ajudam-me em muitas contas.

Para além dos algoritmos apenas referiu as frações como um conteúdo de que gostava e achava significativo (pela sua utilidade), pois dizia "As frações também dão jeito às vezes". Apesar do domínio de outros conhecimentos que sabe explicitar, os algoritmos continuaram a ser a sua primeira e quase única referência quando, no 4.º ano, se volta a falar do que aprendera. Na entrevista feita no 4.º ano quis mostrar a sua habilidade em efetuar o algoritmo da divisão de 152 300 300 por 159, uma divisão por um divisor de três dígitos, algo que andava a aprender com a professora, mas sobretudo com a mãe. Nessa situação, para encontrar o primeiro dígito do quociente, em vez de recorrer a um cálculo mental aproximado (que sabia fazer), disse "em 1 quantas vezes cabe 1, cabe uma". Progrediu no procedimento até verificar e estranhar um resto excessivo (o primeiro resto parcial). Perante isto continuou a não querer usar qualquer estratégia, insistindo que o importante era dominar a técnica.

<u>A memória de problemas</u>

Gostava de problemas que não fossem nem muito complicados nem muito fáceis. Um problema com mais de uma operação era mais interessante do que um para o qual bastasse uma operação apenas. Achava muito giros "aqueles problemas em que não tenho quase dados nenhuns". Deu como exemplo o "problema dos cães" que tinham estado a discutir na aula nesse mesmo dia (3.º ano) e que foi capaz de reproduzir:

> A Joana tem três cães, um grande, um médio e um pequeno.
>
> O maior é 5 vezes mais pesado que o mais pequeno;
>
> O mais pequeno tem 2/3 do peso do cão médio;
>
> O médio pesa mais 9 quilos do que o pequeno.
>
> Quanto pesa cada cão?

Dizia que achava uma "seca" fazer os problemas básicos mas também a maçavam os problemas muito complicados.

Na entrevista feita no 4.º ano começou por dizer que não se lembrava bem do último problema interessante que resolvera, mas sabia que estava no manual. Lembrava-se que teve de corrigir a sua resolução porque não estava bem. Continuou dizendo que tal problema era parecido com outro que tinham resolvido recentemente na sala, mas ela gostava mais da versão que estava no manual. Acabou assim por conseguir lembrar-se do problema: "Uma escola tinha 450 alunos. As raparigas eram o quádruplo dos rapazes. Quantas raparigas e quantos rapazes eram?" Recordava-se também da segunda parte do problema: "As raparigas organizaram um passeio em que só elas participavam e tinham alugado autocarros com 60 lugares. Quantos autocarros alugaram?"

Explicou que se lembrava deste problema porque tinha resolvido de uma maneira e que na sala resolveram de outras maneiras, recorrendo estratégias antigas que usavam antes de aprenderem o algoritmo da divisão. Estava a referir-se ao desenho de esquemas e ao uso de tabelas para realizarem multiplicações e divisões. “Eu gosto de resolver problemas com tabelas”. Esta afirmação ocorre no 4.º ano, na altura em que estavam a resolver problemas que envolviam a determinação de divisores comuns e que na aula resolviam usando tabelas. “Outro género de problemas, sabes, que eu às vezes gosto, outras vezes não gosto… Sabes o que é? É tipo temos um problema principal, e depois é digamos problemas em cadeia, porque é tudo problemas acerca desse principal.”

Ao pedido feito com alguma insistência, esforçou-se por recordar um problema que tenha achado muito complicado. Enunciou então um que, disse, talvez tenha sido feito no ano anterior (no 3.º ano). Acrescentou “não foi muito complicado para mim, mas foi muito complicado para alguns colegas”. “O Rui tinha comprado um televisor grande que tinha custado 1500 €. Ele deu de entrada, acho que 83 € e pagou o resto em 9 prestações. Quanto pagou em cada prestação?” Lembrava-se que tinha sido complicado para alguns colegas porque se esqueceram de subtrair o que já tinha sido pago e que “de certo modo também foi complicado para mim.”

<u>A formulação de problemas</u>

A Madalena recordava-se que inventar problemas era uma atividade que faziam desde o primeiro ano e o que ela gostava de fazer era inventar problemas difíceis. Achava bem inventar problemas.

> Eu acho que é bom para duas coisas: uma é porque desenvolve a minha cabeça para a Matemática, (ri-se) e para o português também, mas pronto. E a segunda coisa que é muito importante também, é porque me desenvolve também em níveis de imaginação.

Considerava muito importante esta segunda razão.

> Se nós não tivermos imaginação quase não conseguimos fazer textos livres, não conseguimos fazer... basicamente metade... O português quase todo está ligado à imaginação . . . a Matemática também. Mas eu acho... eu acho que o português está um bocadinho mais, não muito mas um bocadinho mais ligado . . . por causa dos textos [que é preciso escrever]

Gostava mais de inventar problemas livremente, sem ser a partir de expressões numéricas ou de informações. Quando inventava problemas livremente, dizia, “eu não escolho assim os números para dar coisas certas, eu faço um número, o primeiro que me vem à cabeça”, embora, às vezes também gostasse de inventar problemas para uma dada expressão numérica. No entanto, ver-se-á adiante no problema que inventou, que escolheu criteriosamente o número.

Quando lhe foi pedido para formular um problema de que gostasse, a Madalena perguntou se podia "não ser bem um problema, seja mais para encontrar divisões". Estava a referir-se a uma tarefa de exploração que, dizia, dava para resolver mas não tinha só uma resposta, tinha várias respostas.

"A Joana convidou 96 amigos para irem a sua casa comer bolo de chocolate. Quantos bolos[31] ela fez?" E concluiu, "Não ponho mais nada e este problema dá para resolver. Não tem é resposta certa. Tem várias respostas." Explicou que gostava deste problema porque

> Primeiro não é um problema dos básicos digamos assim. E depois porque não é daqueles problemas que a gente pega no lápis, faz uma continha e já está resolvido, temos que encontrar todas as hipóteses possíveis e depois cada vez encontramos mais.

Questionada sobre o modo como tinha inventado o problema disse " veio-me logo à cabeça" porque uns dias antes tinha resolvido um problema parecido na aula. Acrescenta mais à frente na entrevista "quando escrevo geralmente é a primeira coisa que me vem à cabeça". Neste caso, foi a recordação do problema que já tinha resolvido em aula e do qual tinha gostado: "A Joana . . . convidou uns amigos para lá irem comer . . . biscoitos de erva-doce . . . Fez 24 biscoitos. Quantos amigos foram?[32]"

Estes dois problemas, o que se lembrou de ter resolvido na aula e o que inventou, aparentemente semelhantes, têm uma diferença significativa. A resolução apresentada pela Madalena (Figura 23, na pág.154) não serve ao problema que inventou mas corresponde à resolução de um problema semelhante ao que recordou ter feito na aula, em que o que é invariante é o número de bolos e o que varia é o número de amigos. No que inventou fixou o número de amigos, perguntado quantas fatias fez, pergunta para a qual é indiferente o número que se escolhe para a resposta, não sendo esse número uma função do número de amigos. Tomando em conta a resposta dada pela Madalena, o problema teria de ser enunciado de outro modo. Mantendo-se o mais possível fiel ao contexto original, poderia ser dito nestes termos: «A Joana fez 96 fatias de bolo de chocolate para uns amigos que convidou para irem a sua casa comer. Quantos amigos ela convidou?» Mas há condições que é preciso acrescentar:

i) as 96 fatias foram todas consumidas;

ii) não houve fracionamento das fatias;

iii) as 96 fatias foram sempre distribuídas equitativamente pelos amigos presentes.

[31] Posteriormente alterou a pergunta para "Quantas fatias ela fez?"

[32] É um enunciado tipicamente utilizado para contextualizar a determinação dos divisores de um número, mas ao qual falta acrescentar algumas condições para que o problema faça sentido.

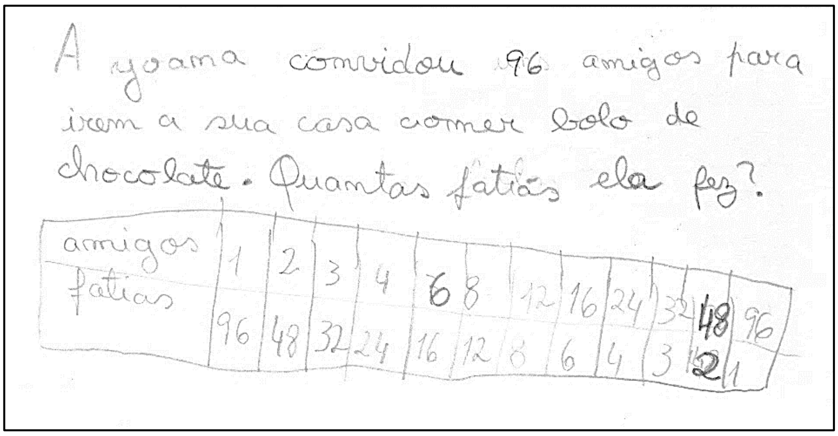


Figura 23: Resolução da Madalena ao problema que inventou por gosto

A falta de rigor na formulação do problema, pode dizer-se, pode estar em linha com a maneira como ela dizia ser o seu modo de invenção de problemas: "quando escrevo geralmente é a primeira coisa que me vem à cabeça". No entanto, tal não foi inteiramente assim, pois a Madalena justifica o número escolhido, o 96. Relembrando o número do problema resolvido na aula, dizia "Ora 24 está bem, tem muitos divisores, mas é assim um número . . . pequenino" e desejando que o número escolhido continuasse a ter muitos divisores, ou mais divisores, explicou:

> Então, eu aumentei o número para 48, que é o dobro, que tem exatamente os mesmos divisores, lá pode ter um a mais, mas tem os mesmos. Aqueles que o 24 tem, tem de certeza. Mas ainda me pareceu pequeno de mais. Voltei a aumentar para o dobro e deu-me 96.

8.4.2. A Tarefa "30×25"

A resolução da tarefa iniciou-se com todos os participantes presentes em simultâneo em torno de uma mesa numa sala própria onde normalmente se realizavam as entrevistas. Apesar de estarem todos juntos, a tarefa de formular o problema, de o escrever, para a expressão numérica dada foi feita individualmente. Quando acabavam de escrever voltavam para a sala e a entrevista (individual) foi feita posteriormente nesse mesmo dia. Naturalmente que, estando todos reunidos na mesma sala, antes de iniciar a resolução, conversaram uns com os outros. Essa conversa ficou registada em vídeo e nela foram significativas a intervenções sobre o gosto e a imaginação de cada um.

Após a exclamação da Clarisse "eu não tenho imaginação", a Madalena interveio dizendo "Eu tenho imaginação, não gosto, não gosto de inventar" e acrescentou depois "Eu prefiro resolver". Esta é uma afirmação que se verificou em várias entrevistas. Mas a Madalena também salvaguardou que, relativamente à formulação, preferia inventar livremente, sem constrangimentos.

Madalena – Eu não gosto muito de inventar…

INV. – Não gostas muito de inventar.

Madalena – Mas ó Pedro [investigador], eu vou-te ser sincera: quando é para inventar, prefiro que não me deem dados nenhuns para o problema, prefiro ser eu a inventar tudo.

INV. – Está bem. Estes aqui…

Madalena – A mim não me importa inventar assim, mas acho que os problemas me saem melhor, saem mais ao meu nível de capacidade, do que se me derem assim. Porque assim só me lembro de, tipo, coisas do primeiro ano.

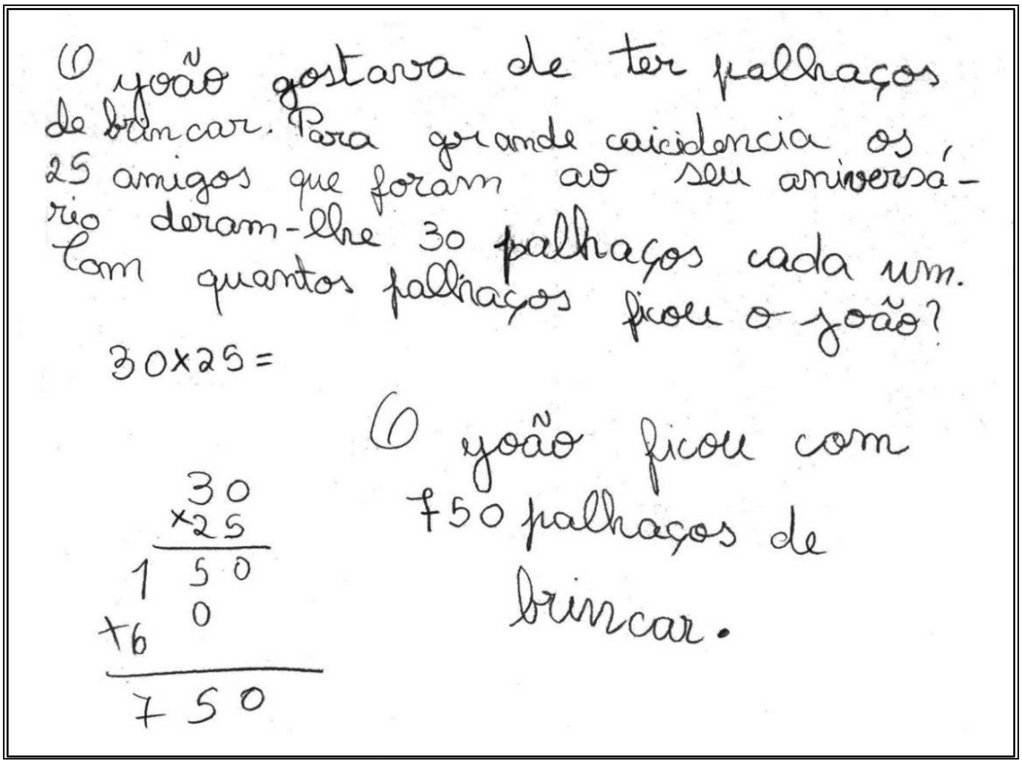
O diálogo acima mostra a apetência de Madalena por desafios de maior complexidade, e que esta é a razão para não gostar de inventar, ou pelo menos, não gostar de inventar a partir de estímulos que limitam a imaginação. Mostra também que ela considerava superiores as suas capacidades, referindo-se muito provavelmente ao seu desempenho escolar. No entanto a Madalena também sugeriu que a simplicidade dos problemas que inventava a partir de dados fornecidos, fazia parte de uma tendência pessoal:

INV. – . . . Portanto, quando tens que inventar um problema assim, só te lembras de problemas simples, não és capaz de inventar um complicado.

Madalena – É. Porque se me dão um dado, mesmo que seja difícil eu lembro-me de coisas do primeiro ano.

Questionada sobre o gosto por inventar histórias (no domínio do Português) a Madalena revelou que esse gosto é condicional, dependente da boa vontade do momento e da liberdade pois disse “Quando estou com pachorra” e “Quando não estou para lá obrigada”. Esta exigência de liberdade na invenção de histórias condiz com a de invenção de problemas sem condicionamentos fornecidos numa tarefa.

A Figura 24, na pág. 156, mostra a resolução da tarefa feita pela Madalena. Antes da formulação ela quis ver esclarecida uma dúvida sobre o contexto: “Pode ser uma coisa que, se fosse na vida real, não tenha sentido nenhum… Não faça sentido nenhum?” Esta questão mostra como a Madalena não quer estar cingida à realidade, isto é, ela reclama a possibilidade de formulação de um contexto fantasista. Nesta medida, ela mostra também saber distinguir o que é do que não é ser realista.


O joão gostava de ter palhaços de brincar. Para grande coincidência os 25 amigos que foram ao seu aniversá-rio deram-lhe 30 palhaços cada um.
Com quantos palhaços ficou o joão?

30×25 =

$$\begin{array}{r} 30 \\ \times 25 \\ \hline 150 \\ +60 \\ \hline 750 \end{array}$$

O joão ficou com 750 palhaços de brincar.

Figura 24: Resolução da tarefa de formulação “30×25” pela Madalena.

Como se pode verificar, no enunciado que imaginou, o contexto – a festa de aniversário – é algo comum, mas a proposta de que todos os convidados oferecem ao aniversariante a mesma prenda e na quantidade indicada não é realista. A Madalena salvaguarda essa inconsistência dizendo que foi uma coincidência. O pedido para formular um contexto irrealista pode ter a ver com a dificuldade em encontrar referentes mais realistas para a ordem de grandeza dos fatores presentes na expressão. Embora à Madalena não lhe ocorra nenhuma situação mais realista, ela, no processo de formulação, tem presente a adequação dos referentes dos números à realidade. A dificuldade de adequar o contexto à expressão numérica pode constituir-se um obstáculo ao gosto pela invenção na medida em limita a liberdade que se requer à imaginação.

O problema formulado encaixa-se na classe de Grupos iguais definida por Greer (1992). O número vinte e cinco funciona como multiplicador, indicando o número de grupos constituídos por trinta palhaços.

A Madalena não mostrou qualquer hesitação na formulação do problema bem como na resolução. Enquanto resolve comenta:

> Madalena – É! Ainda por cima com trinta, tem um zero…
>
> INV. – Trinta, tem um zero…
>
> Madalena – Vinte e cinco tem um cinco. [resolve cantarolando baixinho] Feito!

INV. – O que é que queres dizer com isso que trinta tem um zero e vinte e cinco tem um cinco?

Madalena – É muito fácil… a tabuada do cinco é das mais fáceis e os zeros é só acrescentar.

Este diálogo deixa transparecer que não teria qualquer dificuldade em resolver 30×25 recorrendo a estratégias de cálculo mental. No entanto faz uso do algoritmo. Manifesta-se, como disse noutra entrevista, o gosto pelos algoritmos e a importância que lhes confere. O diálogo mostra também que a facilidade que atribui ao problema está ligada à facilidade do cálculo necessário para o resolver.

8.4.3. A Tarefa "Caixas de Pastéis"

A Madalena, a meio da leitura do enunciado (Figura 15, pág. 83), reconheceu identidade entre o contexto manifesto no problema e o de outro eventualmente resolvido em aula. Os dois contextos identificados enquadram-se no sentido de Grupos iguais da multiplicação (Greer, 1992) e é exatamente a característica de repetição de um determinado valor que foi reconhecida, pela Madalena, no contexto do problema.

INV. – Faz-me um favor Madalena, lê isso em voz alta.

Madalena – "Inventar problemas. Os pais do António têm uma pastelaria. Um dia ele esteve a ajudar o pai a embalar uns pastéis que são vendidos em caixas iguais" — Outra vez o mesmo género de problemas!

INV. – Porquê, por que é que dizes isso?

Madalena – Aquele era de prestações em cada mês e ele pagava a mesma coisa em cada mês. [deve estar a referir-se a algum outro problema resolvido em aula]

INV. – Ahh…

Madalena – "à medida que ia colocando os pastéis nas caixas o António ia escrevendo: número de caixas, nah, nah, nah… número de pastéis embalados, não sei quê, não sei que mais… Faz uma pergunta para um problema, que seja resolvido com uma multiplicação. [pausa] Mas ele só tinha sessenta e quatro pastéis certo?

INV. – Não, ele estava a fazer este registo. Podia ter continuado o registo, faltam aqui coisas para trás e faltam aqui coisas para a frente. Vês aqui as reticências?

Madalena – Ai, mas tem de ser com uma multiplicação? Não pode ser antes com uma divisão? É que a pergunta que eu sei tem de ser com uma divisão!

Para além de a Madalena ter reconhecido o contexto (na medida em que foi capaz de estabelecer uma identidade de contexto entre dois enunciados distintos), mostrou também uma confiança na sua capacidade para lidar com a situação apresentada. Parece que não sentiu necessidade de ler explicitamente os dados numéricos apresentados na tabela, o que pode ser considerado ou interpretado como um indício de que, por serem fáceis de entender, não mereciam uma leitura atenta. A Madalena parece deixar assim transparecer uma atitude de autoconfiança e, ao longo de toda a entrevista, continuará a mostrar indícios semelhantes.

No fim do diálogo acima apresentado, a Madalena explicitou uma curiosidade que antecede a formulação da pergunta pedida na tarefa. Ela pretende formular uma outra pergunta que, disse, "é uma pergunta básica, mas foi a primeira que me veio à cabeça." E a pergunta é: "Quantos pastéis cabem em cada caixa?" E explica por que razão a considera uma pergunta básica:

> Madalena – Eu chamo-lhe básica porque já fazia perguntas destas no segundo ano. No primeiro também fazia mas eram ligeiramente mais fáceis e também porque se, por exemplo, viesse no livro uma coisa destas, perguntavam logo isto.
>
> INV. – Perguntavam logo.
>
> Madalena – Sim isto foi a primeira coisa que me veio logo à cabeça um bocado por causa disso, porque já vi isto montes de vezes.

Verifica-se que o enunciado apresentado na tarefa evocou, na Madalena, a memória de um certo tipo de problemas a que ela atribuiu extrema simplicidade pela frequência com que aparecem desde cedo na escolaridade. Pela mesma razão, associou também a sua "pergunta básica" ao contexto presente no enunciado e ao facto de já ter feito perguntas do mesmo género. Pode-se sintetizar o que a Madalena quereria dizer: nos problemas em que alguém arruma n objetos em m grupos iguais, o que mais frequentemente se pergunta é quantos objetos ficam em cada grupo. Fica claro que esta sua pergunta teve origem na sua experiência em práticas escolares.

A resposta à pergunta é da sua iniciativa, logo no seguimento da explicação sobre a sua simplicidade. A Madalena indica simplesmente a operação da divisão de 16 por 4 com o respetivo resultado e ri-se enquanto exclama "Feito!" dando cumprimento à sua afirmação sobre a facilidade da questão.

A formulação da pergunta que é pedida no enunciado não acarretou hesitações da parte da Madalena: "Quantos pastéis cabem em trinta e duas caixas?" A seguir foi-lhe pedido que explicasse a escolha do número 32 para figurar na pergunta.

> INV. – Diz-me uma coisa… Porque é que tu escolheste o trinta e dois?
>
> Madalena – Porque é que eu escolhi o trinta e dois...
>
> INV. – Para a pergunta?
>
> Madalena – Olha porque é… primeiro porque é… acaba por ser um número, como é par, acaba por ajudar um bocadinho, um bocadinho só a fazer contas. E depois, visto que o último número que está aqui é dezasseis… foi o dobro!

INV. – Foi o dobro. Mas é só essa a razão?

Madalena – Sim e, até por trinta e dois ser par. Isto, quando faço problemas costuma ser com os números que me vêm à cabeça, não costuma ter uma ordem ou assim.

. . .

Madalena - Se ele continuasse o registo, a um certo ponto ia pôr aquilo! [o número 32]

A escolha do número 32 está subordinada a várias razões invocadas pela Madalena: porque é par, e isso torna as *contas* mais fáceis, porque é o dobro de dezasseis e seria o número que apareceria na sequência dos números de caixas. A qualidade de ser par é acessória, não joga um papel significativo na formulação da pergunta, já ser o dobro de dezasseis e ser o que dá continuidade à sequência é relevante. Mas a Madalena não menciona a sequência e a respetiva razão de progressão.

O facto de a Madalena ter escolhido perguntar sobre o número de pastéis em trinta e duas caixas pode estar relacionado com o modo para encontrar a resposta, ou seja, por recurso à propriedade do isomorfismo de medidas (à relação escalar), a qual permite afirmar que se o número de caixas é o dobro, também é o dobro o número de pastéis que elas contêm. Foi realmente este o processo de resolução usado pela Madalena para resolver o problema que criou. Iniciou a resolução logo após ter escrito a pergunta e, recorrendo à relação escalar, e multiplicou 64 pastéis por dois, indicando horizontalmente a operação com o respetivo resultado (determinado mentalmente) e, de seguida, a disposição vertical própria do algoritmo. Mas, durante a conversa sobre a escolha do número 32 para figurar na pergunta, decidiu espontaneamente e numa gesto aparentemente distraído enquanto conversava, acrescentar 16×2=32, acima da indicação 64×2=128. Este pormenor pode ser interpretado como uma clarificação da razão pela qual multiplicou 64 por 2, isto é, assegura que a duplicação do número de pastéis conduz à solução porque também foi duplicado o respetivo número de caixas. É de notar que, apesar de a Madalena conhecer o número de pastéis por caixa, informação que recolheu inicialmente e que considerou básica, ela não recorre a esta informação usando-a como relação funcional para saber o número de pastéis em 32 caixas pela multiplicação de 32 por 4.

Tendo em conta que a Madalena reconheceu a facilidade do problema criado, insistiu-se que formulasse uma questão mais difícil de resolver. A resposta a este pedido resultou numa pergunta que acrescentou um pormenor ao contexto: “Talvez quantas... Pronto… ele fazia trinta e duas caixas num dia. Talvez quantas caixas ele fazia em uma semana?” A justificação para o aumento do grau de dificuldade, diz a Madalena, estava na multiplicação por sete, mais precisamente, na maior dificuldade da tabuada do sete em relação à multiplicação por dois.

Aproveitando a ideia da Madalena de que a maior dificuldade de uma pergunta estaria nos números escolhidos foi-lhe proposto pelo investigador que respondesse à pergunta sobre o número de pastéis em 57 caixas. Na resolução começa por registar “1 caixa – 4 pastéis” e diz “Pronto, isto eu sabia." A seguir propôs a utilização de uma tabela e não a multiplicação pelo fator funcional de 4 pastéis por caixas, isto é, a Madalena não resolve a pergunta sobre o número de pastéis em 57 caixas multiplicando 4 vezes 57, mas constrói uma tabela onde parece utilizar a relação escalar. A Figura 25 mostra a tabela feita pela Madalena.

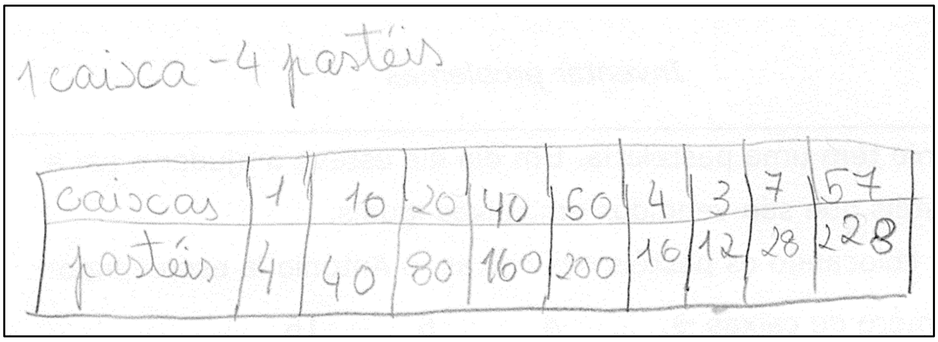


Figura 25: Registo feito pela Madalena para a resolução do problema de saber o número de pastéis embalados em 57 caixas relacionado com a tarefa "Caixas de pastéis".

A pedido do investigador, quando já tinha registado na tabela o número de pastéis em uma e em dez caixas a Madalena começou a explicitar o processo.

> Madalena – Então, vinte caixas oitenta pastéis... Ah, se calhar quarenta caixas, cento e sessenta pastéis. Mas agora já não estou a pôr mais vinte, estou a pôr mais dez. Cinquenta caixas dá duzentos pastéis. Agora o sete... Quatro caixas são dezasseis. Três caixas são doze. Sete caixas são vinte e oito. E cinquenta e sete são duzentos e oitenta pastéis. Portanto o pasteleiro tinha muito trabalho a fazer estes todos, como ele a embalar.
>
> INV. – Portanto cinquenta caixas são duzentos. Sete caixas são vinte e oito. Cinquenta e sete são?
>
> Madalena – Duzentos e oitenta. Ai não! Duzentos e oitenta não. Duzentos e vinte e oito!
>
> INV. – Porquê?
>
> Madalena – Porque ao duzentos só junto vinte e oito, não junto oitenta!

O modo como a Madalena utiliza a tabela, os sucessivos registos que foi fazendo não resultam sempre de operadores escalares. O primeiro registo – 1 caixa, 4 pastéis – é um dado. O segundo registo – 10 caixas, 40 pastéis – foi obtido pela relação funcional, isto é, 40 pastéis é igual a 10 vezes 4 pastéis por caixa. O 3.º e o 4.º registo parecem ter sido obtidos pela relação escalar "dobro de" pois 40 caixas é o dobro de 20 que, por sua vez é o dobro de 10, respeitando assim a propriedade do isomorfismo $f(ax) = af(x)$. Mas a Madalena usa uma linguagem aditiva. Ela explica que 20 caixas é 10 mais 10 e que são 40 mais 40 pastéis; que 40 caixas são 20 mais 20 caixas, o que corresponde a

80 mais 80 pastéis. Estes alunos usavam estas tabelas com relações escalares de dobro no início da aprendizagem da multiplicação mas, como se vê, a linguagem aditiva ainda subsiste. A frase que pronuncia a seguir "agora já não estou a pôr mais vinte, estou a pôr mais dez" mostra que o registo das 50 caixas foi obtido pela adição de 10 a 40 e os respetivos 200 pastéis resultam da adição de 40+160 pastéis, respeitando a propriedade $f(x+x')=f(x)+f(x')$ do isomorfismo.

O 6.º e 7.º registo – 4 caixas, 16 pastéis e 3 caixas, 12 pastéis – são colocados na tabela como dois novos dados. Os pastéis correspondentes a 4 e a 3 caixas resultam da multiplicação de 4 e 3 pelo operador funcional 4 pastéis por caixa. Mas a seguir, as 7 caixas são 4+3 caixas e correspondem 16+12 pastéis.

Por fim, as 57 caixas e respetivos 228 pastéis correspondem à adição dos termos 50+7 caixas e 200+28 pastéis.

Todas estas adições respeitam a propriedade do isomorfismo acima enunciada.

Sublinhe-se que na explicitação feita pela Madalena os procedimentos escalares que deviam ser descritos por expressões multiplicativas como "dobro de", são antes expressos aditivamente: "já não estou a pôr mais vinte, estou a pôr mais dez". Ao dizer "já não estou a pôr mais vinte" está a referir-se à duplicação de 20 caixas e dos correspondentes 80 pastéis obtendo 40 caixas e 160 pastéis.

Seja como for, o que se verifica é que a Madalena dominava as propriedades do isomorfismo da função linear e sabia, portanto, operar dentro das grandezas que se relacionam proporcionalmente, quer aditivamente ou multiplicativamente e ainda usar a relação funcional entre as grandezas.

A Madalena justifica o recurso à tabela:

INV. – Resolveste isso com uma tabela.

Madalena – Sim a mim dá-me jeito... Estas coisas, eu, dá-me jeito assim fazer com tabelas. Porque a tabela dá para tudo. Posso começar com mais pequenos e acabar... Posso começar com um e acabar com dois

INV. – *Okay*, e que outra maneira é que tu achas que se podia resolver isso?

Madalena – Uma conta de multiplicar?

INV. – Uma conta de multiplicar.

Madalena – Mas era muito mais complicado.

Pedro – Qual era a conta?

Madalena – Cinquenta e sete vezes quatro.

Este trecho da entrevista deixa claro a preferência pela utilização de tabelas e dá a entender a confiança depositada pela Madalena neste recurso e em si própria quanto à forma de utilização. O gosto por tabelas foi também referido pela Madalena noutras entrevistas posteriores a esta, mas sempre como uma ferramenta que usa desde cedo. A referência à dificuldade na utilização do da multiplicação de 4 por 57 é provavelmente usada para justificar o recurso à tabela. A não ser que se esteja a referir à dificuldade de uma forma geral, ou à dificuldade manifestada por outros colegas, como algo que é mais complicado aprender e realizar.

8.4.4. A Tarefa: "3×6=18"

A Madalena começou por comentar que as expressões numéricas são demasiado simples pois pertencem à tabuada. Esta aluna tem um gosto especial por problemas algo complexos, tendo dito na primeira entrevista que acha "aqueles problemas em que não tenho quase dados nenhuns é giro de fazer". Pode depreender-se que, com o comentário sobre a simplicidade das expressões numéricas, para ela a tarefa não é suficientemente desafiadora. Outro indício desta possível interpretação da sua motivação para a tarefa é o facto de se propor começar com uma das expressões numéricas que tem um fator em falta, o que poderia traduzir-se num maior grau de desafio. No entanto, assim que ensaia uma primeira formulação para essa expressão, muda de ideias porque, ". . . vou antes fazer um problema para este [3×6=?], que este é que me dá jeito fazer agora." A Madalena não mostra qualquer hesitação na formulação do problema: "Um pai tem três filhos e quer dar seis euros a cada um. Quanto dinheiro vai gastar?" É um problema que está dentro da classe de situações Medidas iguais na classificação de Greer (1992) e no Isomorfismo de medidas segundo Vergnaud (eg. 1983, 1988). De acordo com Schwartz (1988) trata-se de um produto de uma quantidade extensiva (3 amigos) por outra intensiva (6 euros cada um) resultando uma quantidade extensiva (18 euros).

A Madalena escolhe de seguida a expressão 3×?=18 para formular o segundo problema:

Madalena – Então. [pausa] Três amigos têm dezoito euros. Quanto dinheiro tem cada um? Ou seja, tu para fazeres a prova deste problema dá-te isto. [mostrou a expressão] A resposta a este problema vai dar este número. [seis] Esta conta resolve este problema.

INV. – E achas que há outra conta que resolve este problema?

Madalena – Hum… Não sei… agora assim de cabeça…

INV. – Mas diz-me só aqui uma coisa para este problema: Três amigos têm dezoito euros. Quanto dinheiro tem cada um?

Madalena – Sim, é mais dezoito a dividir por três.

INV. – Ah!? É mais dezoito a dividir por três! Estás a dizer que este problema também se resolve desta maneira.

Madalena – Mas isto é a prova.

INV. – Ah! Três vezes um número é igual a dezoito é a prova de dezoito a dividir por três.

Madalena – Sim.

INV. – Só te quero perguntar aqui uma coisa. Olha lá para o texto com atenção. Três amigos têm dezoito euros. Quanto dinheiro tem cada um?

Madalena – Pois é, falta dizer aí uma coisa: sabendo que os três têm o mesmo dinheiro. Assim faz mais sentido.

O enunciado inicial do problema pressupõe que os amigos têm igual quantidade de dinheiro pois isso não é logo explicitado. Repare-se que a Madalena dá conta dessa falta de rigor sem ser necessário que o investigador o especifique claramente, apenas insiste na releitura do enunciado. Depreende-se que a Madalena tem conhecimento desta necessidade de rigor. Sublinhe-se que este rigor corresponde à característica essencial de uma quantidade intensiva, isto é, a quantidade de dinheiro possuída pelos amigos é sempre a mesma, independentemente da quantidade de amigos que o possuem. Dito de outro modo, se os três amigos não tivessem, cada um, a mesma quantidade de dinheiro a situação não seria modelada pela expressão 3×?=18.

O problema formulado enquadra-se na classe de situações Medidas iguais e é modelado por uma divisão com sentido de partilha equitativa de acordo com a classificação de Greer (1992). Na classificação de Vergnaud (eg. 1983, 1988) situa-se dentro do Isomorfismo de medidas. Na análise de Schwartz (1988) insere-se na tríade semântica IEE'.

A Madalena aponta para a expressão 3×?=18 e, dizendo que no lugar do ponto de interrogação deve estar o 6, afirma que essa *conta* resolve o problema. Além disso, tendo reconhecido que há uma operação (18÷3) que resolve o problema, então a expressão 3×6 é a prova. Dito de outra maneira, tendo sido realizada a operação 18÷3 e encontrado o quociente 6, faz-se a prova que verifica a correção da resolução através da operação 3×6. Esta explicitação está em consonância com o modo como se procedia em sala de aula, onde era frequentemente pedido que fosse feita a verificação das operações de divisão através da multiplicação (pela propriedade fundamental da divisão inteira).

Para a expressão ?×6=18 a Madalena cria um problema com outro contexto, não envolvendo dinheiro.

Madalena – Ahh… [pausa] No primeiro dia de aulas, uma mãe manda para os seis filhos dezoito fatias de bolo. Sabendo que cada um comeu a mesma quantidade de bolo, que quantidade de bolo comeu cada um?

INV. – Quando dizes "quantidade" está a falar de…

Madalena – Fatias. E as fatias são iguais.

INV. – E como é que tu respondias?

Madalena – Cada um comeu três fatias de bolo.

INV. – *Okay*. Se a resposta é: Cada um comeu três fatias de bolo, qual é que devia ser a pergunta?

Madalena – Ahh…

INV. – Estou a pensar na interpretação de um texto, como em língua portuguesa. Para a resposta "cada um comeu três fatias de bolo" como é que deve ser o texto da pergunta?

Madalena – Ah! Se isso fosse língua portuguesa a pergunta era "quantas fatias de bolo comeu cada um?"

O problema formulado enquadra-se na tríade semântica IEE' em que E' (quantidade extensiva) corresponde às 18 fatias de bolo, E (quantidade extensiva) corresponde aos 6 filhos e I (quantidade intensiva) corresponde à quantidade de fatias consumidas por cada um dos filhos. É um problema que envolve quantidades discretas (fatias de bolo). Repare-se que é pedido à Madalena que especifique, para evitar ambiguidades, a que espécie de quantidade se refere na pergunta do problema ou quando diz "Sabendo que cada uma comeu a mesma quantidade de bolo". A Madalena responde que a palavra "quantidade" se refere a fatias, portanto, uma quantidade discreta, mas acrescenta imediatamente que tais fatias têm de ser iguais. Esta correção é necessária porque ao perguntar "que quantidade de bolo comeu cada um" é preciso garantir que as fatias são iguais", pois se o problema envolvesse apenas fatias enquanto quantidades discretas, tratando-se apenas de garantir que cada filho comia igual número de fatias, não seria necessária essa correção. Isto revela que a Madalena está ciente, pelo menos intuitivamente, do rigor exigido neste tipo de situações que envolvem quantidades contínuas. Tratando-se de quantidades discretas, esta formulação enquadra-se na classe de Grupos iguais definida por Greer (1992).

Já se disse acima que a Madalena achou esta tarefa demasiado fácil. No final da entrevista discutiu-se um pouco a sua opinião sobre a tarefa.

INV. – Tu achas que se eu trouxesse para aqui outros números isto se tornava mais difícil?

Madalena – Sim.

INV. – Com as mesma contas?

Madalena – Com as mesmas contas.

INV. – Só com outros números. Por exemplo.

Madalena – Eu acho que, de certo modo se tu continuares com isto aqui, mas com números maiores, nem que seja, tipo, vinte e quatro, ou então vinte e quatro vezes setenta e dois, por exemplo, podes fazer com essa conta, fica mais complicado e é a mesma coisa, praticamente.

INV. – Mas achas que se eu puser vinte e quatro e setenta e dois, fica mais difícil inventar um problema?

Madalena – Talvez.

INV. – E porquê?

Madalena – Porque a conta é mais complexa e tu já não podes dizer que ela foi ali à loja e comprou vinte e quatro garrafas de água por setenta e dois euros cada, enquanto que seis garrafas de água por três euros cada já fica mais normal.

INV. – Mais adequado à realidade.

Madalena – Sim.

INV. – Queres dizer que com números maiores…

Madalena – O problema fica mais complicado. Se formos comprar vinte e quatro casas por setenta e dois euros cada não é normal, é um absurdo. Temos de ter ideia do preço das casas.

Segundo a Madalena, a ordem de grandeza dos números envolvido altera o grau de dificuldade da tarefa de invenção do problema pela dificuldade em encontrar referentes adequados. Ela mostra preocupação com o grau de realismo dos problemas e dá sugestões adequadas.

Resumindo, a Madalena formula os problemas sem revelar qualquer dificuldade. Mostra-se ciente do rigor semântico necessário ao enunciado, ainda que isso possa não acontecer na primeira enunciação. Nos problemas formulados para as expressões 3×6=? e 3×?=18 usa quantidades contínuas (dinheiro) e na outra expressão envolve apenas quantidades discretas. As situações formuladas para as expressões com fator em falta envolvem a divisão com sentido de partilha equitativa.

8.4.5. A Tarefa: "Caixas de gelados"

A Madalena escreve três perguntas logo após a leitura silenciosa do enunciado (Figura 18, pág. 88) sem pedir esclarecimentos e dá por concluída a tarefa dizendo "São só estas."

1) Quanto custou cada caixa?
2) Quantos gelados tinha cada caixa?
3) Quanto custou cada gelado?

As duas perguntas que faz a seguir, a quarta e a quinta, surgem de uma provocação que lhe é feita, primeiro afirmando que há mais possibilidades, depois, pedindo-lhe que confirme se a terceira pergunta se refere ao custo do gelado com a promoção. A Madalena reage de imediato, escrevendo silenciosamente as duas perguntas que se seguem.

4) Quanto custava cada gelado sem a promoção?
5) Quanto gastava o pai do Francisco sem a promoção?

Relativamente à quinta pergunta esclarece oralmente que se refere ao gasto na compra das mesmas seis caixas, mas agora se não houvesse qualquer promoção.

Explica, de seguida, porque lhe parece que não há mais perguntas.

Madalena – É porque é assim, há muitas perguntas: quanto gastava se trouxesse tantas caixas, quanto gastava se trouxesse outras tantas...

INV. – Hum, hum.

Madalena – São infinitas. Os números são infinitos.

Nesta justificação a Madalena afirma a possibilidade de formular mais perguntas, mas baseia essa afirmação não em perguntas diferentes, mas na variação da condição que integra a sua quinta pergunta, isto é, o número de caixas a pagar numa compra.

Ainda sobre as suas primeiras perguntas, a primeira e a terceira não especificam se o custo que se pretende saber tem ou não tem em conta a condição promocional. Ela não especifica, mas a resolução que apresenta mostra que se refere ao custo tomando em conta a promoção.

A resolução dos problemas colocados pelas primeiras três perguntas não ofereceu dúvidas à Madalena. Resolve-os em silêncio, sem qualquer interrupção. O número de gelados por caixa é encontrado mentalmente, isto é, ela indica horizontalmente a operação e escreve de imediato o resultado. O mesmo se passa para determinar o custo de cada caixa, dividindo 7,20€ por 6, encontrando o resultado sem recorrer ao algoritmo. Para o cálculo do custo de cada gelado divide 7,20€ por 24 gelados fazendo uso do algoritmo. Repare-se que, apesar de saber o número de gelados por caixa e o preço de cada caixa, resultado das duas primeiras questões, não usa estes dados para calcular o custo de cada gelado. É plausível, portanto, que a pergunta sobre o custo de um gelado não tenha sido pensada como estando dependente da resolução das duas primeiras. Ou seja, a pergunta é formulada antecipando a resolução pela divisão de 7,20€ por 24 gelados.

Na resolução da quarta pergunta, que incide sobre o preço de cada gelado sem a promoção, a Madalena exprime dúvida quanto à forma de resolver.

Madalena – Esta agora, ó Pedro [investigador], esta agora…não estou a ver como é que posso resolver esta.

INV. – Hum, hum. Então quer dizer…

Madalena – Esta dá para resolver… dá para resolver que eu sei que dá.

INV. – Então, quer dizer, vamos lá ver uma coisa. Há pouco disseste que quando fazias a pergunta também pensavas na maneira de resolver. Quer dizer, quando fizeste a pergunta sabias que dava para resolver?

Madalena – Sim.

INV. – Mas…

Madalena – Não estava a ver como.

INV. – Não estavas a ver como, portanto, não pensaste na conta?

Madalena – Não. Não pensei na conta… não pensei propriamente na… no resultado vá! Pensei mais ou menos nas operações mas foi assim por alto. Foi muito por alto.

É preciso ter em conta que esta quarta pergunta nasce depois de lhe ter sido pedido que esclarecesse a incidência da terceira: "Mas isto foi o preço que custou cada gelado, com a promoção, certo?". A reação da Madalena a esta pergunta do investigador foi a escrita da pergunta sobre o preço do gelado sem promoção. Esta reação foi imediata, sem ter havido qualquer pausa, e corrobora a explicação dada pela Madalena – "Não pensei na conta… não pensei propriamente na… no resultado vá!" Este incidente mostra que as perguntas formuladas pela Madalena surgem de uma antecipação da resolução, mas também, no caso desta pergunta, tal antecipação não ultrapassasse o nível da possibilidade. Sobre a formulação das primeiras perguntas ela diz "eu não te sei explicar como é que eu penso nisto, porque eu leio o texto e as perguntas vêm-me à cabeça", embora acabe por reconhecer "que quando estamos a pensar nisto [na formulação das perguntas], temos que resolver mais ou menos mentalmente…".

Questionada sobre o que pensou para formular a quinta pergunta (Quanto gastava o pai do Francisco sem a promoção?), exclama que seria melhor resolver esta antes da quarta. A razão desta opção pode estar no facto de ter antevisto com maior clareza o processo de resolução desta pergunta, o qual passa por determinar o custo de uma caixa sem a promoção. Ou seja, poderá ter visto que precisa do custo da caixa sem a promoção para saber o custo de um gelado sem a promoção. Para tal propõe-se dividir o custo total (7,20€) por 4 caixas, explicando:

INV. – Portanto, tu dividiste 7 e 20… por 4, para saber o quê?

Madalena –O preço da caixa.

INV. – O preço da caixa com a promoção ou sem a promoção?

Madalena – Sem.

INV. – E como é que tu sabes que é a dividir por 4?

Madalena – Porque olha lá, aqui diz: leve 3 pague 2.

INV. – *Okay*.

Madalena – Ele levou 6.

INV. – *Okay*.

Madalena – Ora 3… 6 é 3 mais 3.

INV. – *Okay*.

Madalena – Ou seja, mas como ele levava 3 e depois só pagava duas, o preço fica 2 mais 2, que dá 4.

INV. – *Okay*.

Repare-se que, para explicar que são quatro as caixas efetivamente pagas (exprimindo a relação de “leve 3, pague 2” para “leve 6 pague 4”), o seu discurso tem características aditivas pois descobre a relação escalar entre 3 e 6 dizendo que 6 é 3 mais 3 e não que 6 e o dobro de 3 (como fez a Isabel) ou que 6 é 2 vezes 3 (como fez o Daniel).

Feita a divisão dos 7,20€ por 4 caixas, a Madalena prossegue, de seguida, para a multiplicação deste quociente por 6 caixas e conclui a resposta à quinta pergunta “O pai do Francisco gastava 10 euros e 80”. E sem mais delongas passa à determinação do custo de cada gelado sem a promoção, que é o objetivo da quarta questão, usando como dividendo o custo da caixa sem promoção que tinha acabado de encontrar. No entanto engana-se e divide por 6, considerando este número como sendo a quantidade de gelados por caixa. Em consequência, afirma que o custo de cada gelado sem ou com a promoção é o mesmo.

> Madalena – Isto é o preço de uma caixa sem promoção [refere-se a 1,80] Agora divido isto por 6, que é o preço duma caixa pelos 6 gelados… dá o preço de cada gelado. Que dá a mesma coisa. [pausa]
>
> INV. – Não pode dar a mesma coisa, pois não?
>
> Madalena – Pedro [investigador], faz a conta!
>
> INV. – Dividiste 1,80 por 6 porquê?
>
> Madalena – Para saber o preço de cada gelado.
>
> INV. – Mas porque é que dividiste por 6?
>
> Madalena –Ah pois é! Aqui tem que se dividir por 4! Não é por 6!

Este diálogo pretende apenas chamar a atenção para o facto de a Madalena ter assumido, sem expressar qualquer dúvida, que não havia diferença de preço. Revela, de algum modo, a confiança que tem no resultado das operações que faz. Nesta situação, que pode ser apenas um caso isolado, tal confiança sobrepôs-se ao sentido crítico sobre a realidade.

A Madalena, na resolução da tarefa e ao longo da entrevista, como aliás se pode ver nos diálogos acima transcritos, mostra poucas hesitações, resolvendo com desembaraço, tanto a formulação das perguntas como a sua resolução. A exceção é a resolução da quarta pergunta, como acima se expôs. Foi, como ela diz, uma pergunta feita sem pensar “propriamente” na resolução.

8.4.6. Síntese

Apresenta-se aqui a síntese dos resultados que se obtiveram da Madalena e que contribuem para responder às questões do estudo. Tais resultados são apresentados em três tabelas, a primeira contendo opiniões e conceções explicitadas, a segunda com os resultados das tarefas de formulação de problemas a partir de expressões numéricas (“30×25” e “3×6=18”) e ainda um problema formulado sem restrições, e finalmente, a terceira tabela, com os resultados das tarefas de formulação a partir de dados fornecidos em contexto ("Caixas de Pastéis" e "Caixas de Gelados").

A Tabela 14, na pág. 170) apresenta a opinião da Madalena e colegas participantes no estudo sobre o seu desempenho escolar, as suas preferências em relação a matérias de estudo, o que pensava sobre a resolução e formulação de problemas em geral.

Na Tabela 15, na pág. 171) está, na primeira coluna, o enunciado inventado. A segunda coluna refere-se ao sentido do contexto de acordo com Greer (1992). Na terceira coluna, designada Formulação, está a indicação da origem do problema ou o que esteve na base da formulação. Na quarta coluna é revelada o modo de resolução, que só faz sentido ser apresentado para a resolução da expressão 30×25 e para a resolução do problema formulado livremente. Na última coluna estão anotações sobre algum aspeto relevante.

A opinião que tinha seu desempenho condizia com a dos seus colegas participantes no estudo. Tal opinião tão positiva de si foi expressa mais vezes de modo indireto em algumas ocasiões das quais se destacam as reações às propostas de formulação de problemas, que, à exceção da tarefa "Caixa de Gelados", as considerava elementares ou sobejamente conhecidas. Ou quando se refere à preferência pela formulação livre de problemas por assim poder formular problemas *mais ao seu nível*.

Afirmou assertivamente o seu gosto pela Matemática, pelo tema Números e Operações e, consequentemente, pelos algoritmos e tabelas que a ajudavam nos cálculos, e pela resolução de problemas, mais do que pela formulação. É significativa a sua expressão relativa ao gosto moderado pela resolução de problemas. Não gostava dos problemas nem muito difíceis nem muito fáceis. Ou seja, exprime o seu gosto pelo desafio, mas também o limite desse mesmo desafio.

Disse várias vezes, sobre o processo de formulação de problemas, que pensava na primeira coisa que lhe vinha à cabeça, que, por exemplo, não era capaz de formular problemas difíceis se visse uma expressão elementar (como as que foram mostradas nas tarefas "30×25" e "3×6=18"), porque só se lembrava dos problemas elementares dos primeiros anos de escolaridade (Tabela 15, na pág.171). Esta afirmação, de que pensa na primeira coisa que lhe vem à cabeça, não significa que o problema inventado seja completamente irrefletido. Pode observar-se nos enunciados que inventou ou até mesmo quando foi mais específica na explicitação dos processos de invenção, que tal afirmação pode significar que não se detinha a pensar aprofundadamente no enunciado.

Tabela 14: Resumo dos resultados relacionados com opiniões e conceções da Madalena sobre o desempenho, as matérias escolares, a resolução e a formulação de problemas.

	Considerações explícitas da aluna	Observações
Desempenho	Colocou-se a si entre os melhores, entre o Daniel e a Francisca.	O Daniel considerava-a a melhor aluna, embora se considerasse a par dela na resolução de problemas. O Ricardo considerava-a a melhor. A Isabel também, mas a par do Daniel.
Preferências Temas Tópicos	Gostava mais de Matemática do que Português. Preferia os Números e operações à Geometria e à OTD[33]. Não achava piada aos problemas com gráficos. Gostava de cálculos, algoritmos e de tabelas. O que gostava mais era de resolver problemas.	As tabelas que refere, segundo parece, são as que usava para calcular produtos ou quocientes e as que usava para resolver problemas que envolviam divisores comuns. Sublinhava demoradamente o seu gosto pelos algoritmos
Resolução de problemas	Gostava de problemas que não fossem nem muito complicados nem muito fáceis. Problemas com mais de uma operação são mais interessantes. Não gostava de problemas básicos. A resolução de problemas serve para desenvolver o cálculo mental e aprender o que em adultos será útil.	Evocava problemas de memória (porque foram difíceis, porque teve de corrigir, porque tinham poucos dados…) e era capaz de identificar semelhanças tendo em conta classes de situações.
Formulação de problemas	Achava que a invenção de problemas fazia bem porque desenvolvia “a cabeça” para a Matemática, Português e a imaginação. Gostava mais de resolver do que inventar problemas. Se era para inventar preferia fazê-lo livremente: assim inventava problemas mais ao seu nível e porque ia “formando a resposta . . . pensando em maneiras de fazer”. Já em tarefas de formulação de problemas dizia que inventava a primeira coisa que lhe vinha à cabeça.	Exemplo de um problema ao seu nível foi o que inventou livremente e cuja resolução exigia a determinação de todos os divisores de 96. Apesar de ter dito repetidas vezes que formulava a primeira coisa que lhe vinha à cabeça, reconheceu também que inventava com base noutros problemas conhecidos, ou que antecipava a resolução quando formulava uma pergunta. Verificou-se também que usava critérios na seleção dos números que integravam as perguntas.

[33] Organização e Tratamento de Dados

Tabela 15: Síntese dos resultados obtidos da Madalena nas tarefas de formulação baseadas em expressões numérica e no problema de formulação livre.

Tarefa	Enunciado	Sentido do contexto	Formulação	Resolução	Anotações
“30×25” 2014 maio 16	“O João gostava muito de ter palhaços de brincar. Para grande coincidência os 25 amigos que foram ao seu aniversário deram-lhe 30 palhaços cada um. Com quantos palhaços ficou o João?”	Grupos iguais	Com base no conhecimento de problemas que considera elementares de anos anteriores.	Faz uso do algoritmo, mas afirma a facilidade do cálculo mental.	Reconhece a irrealidade do contexto que inventou.
“Livre” 2014 outubro 23	“A Joana convidou 96 amigos para irem a sua casa comer bolo de chocolate. Quantas fatias ela fez?” *Tendo em conta a resolução explicitada, o enunciado pretendido respeitaria as seguintes condições: Que número de pessoas é possível reunir para consumir integralmente 96 fatias de bolo distribuídas igualmente, sem que sejam fracionadas?*	Divisão por agrupamento – o número de pessoas corresponde ao número de grupos (Grupos iguais) em que se podem repartir as fatias de bolo.	Por semelhança com outro: “foi a primeira coisa que me veio à cabeça”. Seleção de 96 por ter mais divisores que 24, n.º usado no problema em que se inspirou. Duplicou duas vezes 24 esperando incrementar o número de divisores.	Tabela em que há correspondência entre o número de convidados e o número de fatias formando um par de fatores cujo produto é 96 (pares de divisores).	O problema surge também para exemplificar um problema que não se resolve apenas com uma operação. Ela crê que o dobro de um número tem mais divisores que esse número.
“3×6=18” 2014 dezembro 2	3×6=? “Um pai tem 3 filhos e quer dar 6 euros a cada um. Quanto dinheiro vai gastar?” 3×?=18 “Três amigos têm 18 euros. Quanto dinheiro tem cada um?” ?×6=18 “No primeiro dia de aulas, uma mãe manda para os 6 filhos 18 fatias de bolo. Sabendo que cada um comeu a mesma quantidade de bolo, que quantidade de bolo comeu cada um?	Multiplicação: Medidas iguais Divisão: Partilha equitativa Divisão: Partilha equitativa (Grupos iguais)	Referência a problemas elementares e à simplicidade das operações.	—	Comenta que, com números maiores, era mais difícil inventar um problema por ser mais difícil encontrar um contexto adequado [realista].

Tabela 16: Síntese dos resultados obtidos da Madalena nas tarefas de formulação baseadas em contextos.

Tarefa	Comentário ao enunciado	Perguntas enunciadas	Formulação	Resolução
“Caixas de Pastéis” 2014 outubro 9	Reconhece o sentido de Grupos iguais do contexto enfatizando a frequência com que aparece nos problemas de multiplicação, e especifica um já resolvido em aula. Salta a leitura dos dados numéricos presentes na tabela. Interroga o número de pastéis embalados, se 64 é limite. Questiona se não pode antes formular uma pergunta de divisão.	“Quantos pastéis cabem em cada caixa?” “Quantos pastéis cabem em trinta e duas caixas?”	Com base na experiência já vivida, afirmando que se trata de uma pergunta básica associada ao tipo de problemas (Partilha equitativa), a primeira que lhe surgiu pela frequência que com ela se depara. Afirma que a escolheu o número 32 caixas porque é o dobro de 16 caixas, é par, e é fácil de calcular.	Cálculo mental: 16÷4=4 Recorre à relação escalar. Regista “64×2=”, acha o resultado (128) com o algoritmo. Recorre a uma tabela para calcular o n.º de pastéis em 57 caixas, fazendo uso das propriedades do isomorfismo, evitando a multiplicação 4×57. Justifica-se pelo gosto por tabelas.
“Caixas de Gelados” 2015 janeiro 6	Inicia a formulação das perguntas assim que acaba de ler o enunciado, sem expressar qualquer comentário.	a) “Quanto custou cada caixa?” b) “Quantos gelados tinha cada caixa?” c) “Quanto custou cada gelado?”	Antecipando a resolução ou uma possível resolução.	a) Cálculo mental: 7,20 ÷ 6 = 1,2 b) Cálculo mental: 24÷6=4 c) Algoritmo: 7,20÷24=0,30

Com exceção da tarefa "Caixas de gelados", em todas as outras a Madalena disse que foram inventadas a partir da primeira coisa que lhe veio à cabeça, mas o que diz depois ajuda a perceber o que isso significava.

Para as tarefas "30×25" e "3×6=18", já acima se mencionou, a Madalena disse que só se lembrava de problemas elementares que já tinha resolvido nos primeiros anos da escola e que, portanto, são desse género os que inventa. Assegura também que a grandeza dos números envolvidos não permite a formulação de problemas complexos

A Tabela 16, na pág. 172) apresenta na primeira coluna, "Comentário ao enunciado", que se refere ao que o aluno disse ou fez logo após a leitura do enunciado da tarefa. Isto é significativo porque se verifica que tem relação com as perguntas formuladas e com o processo de formulação. Na segunda coluna estão as perguntas formuladas, apenas aquelas que foram feitas antes de qualquer intervenção do investigador. A terceira coluna refere-se à origem ou processo de formulação. Na quarta coluna está o processo de resolução.

Na tarefa "Caixas de Pastéis", a sua primeira pergunta, que realmente não respeitava o pedido expresso na tarefa[34], estava relacionada com a frequência com que se deparava com aquele género de problemas: a Madalena reconheceu a classe de problemas de partilha equitativa. Já não se tratava, portanto, da evocação vaga de um tipo de problemas incaracterístico, mas de um tipo de problemas bem caracterizado quanto ao modelo que os resolvia e que está estreitamente ligado a um certo tipo de pergunta. Na formulação da pergunta de acordo com o pedido da tarefa (para ser resolvida por uma multiplicação), a Madalena escolheu o número 32 por ser fácil (par e dobro de 16).

Na tarefa de formulação livre, isto é, quando lhe foi pedido que inventasse um problema de que gostasse, a Madalena inspirou-se num que resolvera recentemente em aula, e procurou modificá-lo com o objetivo de potenciar uma característica que lhe aprazia na resolução de problemas: que não se resolvam com uma operação apenas. Essa característica obrigava a introdução no enunciado de um número que tivesse muitos divisores. E se o número dado no problema resolvido em aula era 24, a Madalena duplicou-o duas vezes (obtendo 96) garantindo assim o aumento do número de divisores. O conhecimento matemático jogou aqui um papel fundamental. No entanto, as condições estabelecidas no enunciado que a Madalena inventou não estavam de acordo com as do problema que a Madalena julgava imitar.

Na tarefa "Caixas de Gelados" acabou por se verificar que as perguntas que formulou se baseavam na antecipação da resolução do problema ou da possibilidade de resolução. Ela própria

[34] A sua primeira pergunta resolve-se com uma divisão e não por uma multiplicação, como era pedido na tarefa.

reconhece que, tal como na resolução de problemas as *contas* surgem à medida que vai lendo o enunciado, assim também na formulação das perguntas vai pensando nas operações que pode fazer.

A Madalena afirmou o seu gosto por algoritmos e tabelas. Esse gosto viu-se refletido tanto na formulação como na resolução dos problemas que formulou. Na tarefa “Caixas de pastéis” escolheu o número 32 caixas para a pergunta que inquiria sobre o número de pastéis embalados, usando depois a relação escalar para encontrar a resposta. E, apesar de para a resolução bastar duplicar 64, a Madalena usou a disposição vertical própria do algoritmo. Mas o uso da relação escalar estava relacionado com o seu gosto por tabelas porque, logo a seguir, instada a determinar o número de pastéis em 57 caixas, e sabendo o número de pastéis por caixa, ela voltou a usar a relação escalar, construindo uma tabela e não o algoritmo. Nessa tabela, quando usou relações escalares, nomeadamente “dobro de” usou a adição, estabelecendo o dobro pela adição de um número a si próprio. Ainda assim mostrou saber usar as propriedades do isomorfismo da função linear.

8.5. O caso do Ricardo

8.5.1. Características pessoais

Com quem vive e estuda

O Ricardo tinha um irmão com 6 anos e uma irmã com 10. Viviam alternadamente uma semana com o pai e outra com a mãe. Em casa do pai vivia também a avó paterna. Disse que normalmente fazia sozinho os trabalhos que levava para fazer em casa e só depois mostrava a quem estava com ele, mas na semana em que estava com a mãe fazia os trabalhos no ATL (Atividades dos Tempos Livres). Quando estava com o pai fazia os trabalhos em casa. Dizia que o pai gostava de Matemática, mas nem sempre percebia o que estava no manual ou o que ele, Ricardo, fazia.

O gosto pela Matemática

Gostava decididamente mais de Matemática porque a Português “não me oriento muito bem”. Explicava que trocava letras ao escrever e que não gostava de inventar textos. O desenho das letras, ou a caligrafia, era uma das preocupações do Ricardo, resultado da pressão que sobre ele era exercida. Referiu-se a isso na entrevista feita no 3.º ano explicitando a sua dificuldade e a dificuldade de seu pai que “não percebe as letras de agora”.

De entre os temas do currículo de Matemática, gostava mais da Organização e Tratamento de Dados, a seguir gostava dos Números e Operações, depois da Geometria e, finalmente, da Medida. Explicou que não gostava da Medida porque “temos de fazer tabelas [com] gramas e quilogramas e é preciso decorar”. Na Geometria era a mesma coisa, não gostava de decorar.

Gostava muito dos problemas que envolviam gráficos porque também gostava muito de Estudo do Meio e os gráficos apareciam muitas vezes nesta disciplina. No 3.º ano dizia que gostava tanto de resolver problemas como de fazer *contas*, mas no 4.º ano já respondeu que entre resolver problemas ou resolver operações “gosto mais de fazer a multiplicar”, o que, muito possivelmente quer dizer que gosta do que envolve multiplicações, sejam problemas ou apenas operações. Por essa altura não andava a gostar muito das operações de divisão (quociente de dois algarismos), e as operações favoritas eram a adição e a multiplicação. O gosto pela resolução de problemas já era “mais ou menos”. Achava difícil explicar como se pensou a resolução de um problema. Gostava muito de fazer a prova real nos problemas que envolviam a divisão, o que condizia com o seu gosto maior pela multiplicação.

O desempenho em Matemática

A propósito do seu desempenho em Matemática dizia que não era tão bom porque a resolver os problemas seguia o caminho mais difícil e demorava mais tempo, mas era o caminho que lhe dava mais jeito.

Na sua opinião, a Madalena era a melhor aluna na Matemática O Daniel, o Miguel e a Rita eram outros alunos muito bons a resolver problemas. A Isabel estava entre as que tinham mais dificuldades. Quanto a si mesmo não foi assertivo, disse primeiro que não sabia e depois respondeu que sim à pergunta se se estaria entre o grupo dos bons e dos menos bons.

Questionado (3.º ano) sobre o que já tinha aprendido, o Ricardo referiu as operações e em particular a divisão e os termos que lhe estão associados (dividendo, divisor, quociente e resto), o diagrama de caule e folhas e a numeração romana. Esta referência à numeração romana teve uma correspondência ao que foi observado na rotina do número do dia, onde o Ricardo participava muitas vezes traduzindo o número do dia para numeração romana. Referiu ainda o treino dos algoritmos em contexto de resolução de problemas como sendo uma das aprendizagens recentes que tinham sido feitas.

Não achava difícil aprender os algoritmos, mas reconhecia algumas dificuldades, por exemplo, "às vezes esqueço-me dos que vão". Esta referência aos esquecimentos estava em linha com o que disse, de não gostar do que exigia memorização. Observaram-se, de facto, ao longo das entrevistas, enganos na execução de cálculos devido a esquecimentos ou confusões nos procedimentos.

O Ricardo recorria frequentemente à adição para efetuar multiplicações. Explicou que preferia a adição à multiplicação, sobretudo se o multiplicador fosse um número pequeno.

> Se for a conta muito muito grande vou pelas de vezes, não vou às de mais, porque demora-se…porque sei que vou demorar muito tempo. Se for um número abaixo de 90, faço de mais. Se for a mais do que 100 . . . já vou a vezes.

Na verdade a consideração do 90 como um valor de fronteira deve ser considerado uma força de expressão que não correspondia exatamente à realidade.

No 4.º ano, o Ricardo fazia sistematicamente a prova real da divisão. Esta era uma prática comum nas aulas e nos exercícios dos manuais, mas o Ricardo reforçava dizendo que gostava de o fazer. Nesses casos não usava a adição.

<u>A memória de problemas</u>

Respondendo ao pedido de se lembrar de um problema que tivesse resolvido, o Ricardo disse que não se recordava de nenhum do livro, mas sim de um que resolvera na aula. Referia-se à atividade de treino de algoritmos a partir de *word-problems* simples ditados pela professora ou pelos próprios alunos. Dizia, "os problemas que agora temos resolvido [na sala] são quase todos da mesma lógica . . . um menino tem e depois tem de distribuir." Disse que não se lembrava dos números, mas conseguiu recordar-se da ordem de grandeza. O enunciado começava por dizer "Um menino tinha 976 carros e queria distribuir igualmente por caixas que levavam 29 carros", mas ao formular a pergunta o Ricardo hesita:

> Ricardo – Quantos ficavam… quantos carros cabem nas vinte e nove cai… quantos… quantos é que sobram?
>
> INV. – Quantos é que sobram?
>
> Ricardo – Quantas caixas… Quantos carros ficavam nas caixas? E depois quantos sobravam.
>
> INV. – Então… cada caixa leva vinte e nove carros.
>
> Ricardo – Sim.
>
> INV. – Portanto o que querias saber…
>
> Ricardo – Não, tínhamos que dividir este por este. [aponta]
>
> INV. – *Okay*, tinhas que dividir novecentos e setenta e seis por vinte e nove. Mas era para saber o quê?
>
> Ricardo – Quantas caixas eram.
>
> INV. – Quantas caixas eram. Hum, hum. Quantas caixas… eram precisas?
>
> Ricardo – Sim.

Disse que se lembrava do problema porque tinha gostado de o resolver. Lembrava-se que tinha de fazer uma divisão e a respetiva verificação (prova real). Na sua opinião, lembrar-se de um problema parecido quando se está a resolver outro complicado poderia ajudar mas também poderia causar confusão.

O interesse de um problema tanto poderia estar na história como nos números envolvidos. Mas do que ele gostava era de problemas com muitas *contas*. Não gostava de resolver problemas fáceis com *contas* óbvias. O que gostava era dos que tinham cálculos que ele conseguisse "fazer só de cabeça". Esta afirmação parece contradizer a anterior, de não gostar de problemas com cálculos óbvios, mas na verdade, no contexto das práticas de sala de aula, cálculos que se resolvem mentalmente não são necessariamente óbvios. O Ricardo poderia estar a referir-se a cálculos resolvidos com recurso a estratégias de cálculo e não com algoritmos.

<u>A formulação de problemas</u>

Lembrava-se que já inventam problemas desde o primeiro ano. Mas gostava mais de resolver do que inventar. Não gostava de inventar porque achava que não tinha jeito, porque às vezes fazia "frases que não têm muito sentido". Além disso não gostava de inventar histórias.

Para o Ricardo "inventar [problemas] não é a coisa…principal da matemática" o que é mais importante é saber resolver os problemas.

Preferia inventar problemas a partir de dados fornecidos porque desse modo não tinha de andar à procura de números. Quando tinha de procurar números acontecia escolher uns e depois tinha de apagar para escolher outros e não gostava disso.

Ao pedido que invente um problema de que goste, disse "O Luís tem 28 carrinhos e disse à mãe que quando fizer anos quer ter mais 2005 carrinhos. Com quantos carros ficará?"

Explica que gosta deste problema porque os dados correspondem aos números dos seus anos: 2005 é o ano em que nasceu e 28 o dia. Além disso é um problema que se resolve com uma adição que é uma operação de que ele gosta. Naturalmente, encontrar a resposta a este problema não ofereceu qualquer dificuldade ao Ricardo, tendo resolvido a adição mentalmente.

8.5.2. A Tarefa "30×25"

A tarefa de inventar um problema que se resolva com a operação 30×25 iniciou-se com todos os participantes presentes em simultâneo ao redor de uma mesa numa sala própria, onde normalmente se realizavam as entrevistas. A tarefa de formular o problema, de o escrever, para a expressão numérica dada foi feita individualmente. Quando acabavam de escrever voltavam para a sala e a entrevista (individual) foi feita posteriormente nesse mesmo dia. No entanto, antes de se iniciar o trabalho, instalou-se uma conversa informal entre os alunos com algumas intervenções significativas sobre o gosto e a imaginação de cada um na formulação de problemas. Foram feitas afirmações como "Eu não tenho imaginação", "Eu tenho imaginação [mas] não gosto de inventar", "Eu prefiro resolver". Mas durante todo este tempo e apesar do tom informal da conversa, o Ricardo não fez qualquer intervenção. Ele já tinha referido na entrevista inicial que "Não tenho jeito nenhum para inventar problemas", mas aqui não o confessou.

Poucos minutos depois de todos terem iniciado a resolução da tarefa, o Ricardo deu por terminada a tarefa. O investigador, junto dele, verifica que tinha escrito "Calcula 30×25?". Explicou-lhe então em voz baixa que tinha de inventar um enunciado, uma história, como era costume nos problemas que conhecia. O Ricardo volta ao trabalho e dá por terminado pouco depois. O enunciado do problema que formulou diz "O menino Vítor não sabe quanto é 30 × 25. Ajuda-o."

INV. – Então, Ricardo, então explica-me lá. Porque é que tu fizeste esse problema?

Ricardo – Ah, porque é que eu escolhi este?

INV. – Sim.

Ricardo – É um simples.

INV. – É um simples?

Ricardo – Sim.

INV. – E porque é que tu achas que isso é simples?

Ricardo – Hum, tem poucas palavras.

O enunciado é simples porque tem poucas palavras. Esta afirmação pode ser um indicador do tio de problemas de que gosta. O enunciado “O menino Vítor não sabe quanto é 30 × 25. Ajuda-o.” Não deixa de apresentar um contexto. Não se pode dizer, em verdade, que o Ricardo não cumpriu a tarefa. No entanto o contexto que criou não satisfaz um objetivo básico, mas subentendido, deste tipo de tarefa de formulação de problemas, objetivo esse que é definir um contexto que dê sentido ou significado à expressão numérica apresentada. Dito de outro modo, a tarefa pretende observar se o aluno consegue criar um contexto que seja modelado pela operação. É nesse contexto que se poderia observar o entendimento que o aluno tem da operação e, por isso mesmo, se considera associado a esta atividade o processo *Compreender* definido por Christou et al. (2005).

Mais adiante na entrevista o Ricardo faz referência à sua falta de jeito a Português e ao facto de não gostar de inventar histórias. É possível que este tenha sido o motivo para a fuga à formulação de um contexto mais significativo.

Na Figura 26, na pág. 180, estão três processos de cálculo utilizados para resolver o problema criado. Estão numerados para indicar a ordem pela qual foram realizados. Na realidade, para resolver o problema, o Ricardo recorreu apenas e espontaneamente a uma estratégia de cálculo mental, que na figura aparece indicada como 3000+150=3150. O segundo processo (algoritmo do lado direito) foi feito por sugestão do investigador, e o terceiro (algoritmo do lado esquerdo) foi o próprio Ricardo que tomou a iniciativa de fazer, pois queria experimentar “ao contrário”, isto é, inverter a ordem dos fatores.

Ele explicou a estratégia de cálculo que usou:

Ricardo – Comecei… vezes dez… acrescenta-se um zero.

INV. – Porque é que tu fizeste vezes dez?

Ricardo – Porque, aqui, no vinte, cabe lá um dez, até cabem dois, então acrescentei um zero, e depois, como era ainda vinte, acrescentei outro zero.

(…)

Ricardo – (…) e depois estive aqui a ver quanto era trinta vezes o cinco, daqui, do vinte e cinco.

(…)

INV. – Hum. Depois fizeste mais cento e cinquenta porquê?

Ricardo – Porque trinta vezes cinco é cento e cinquenta.

Percebe-se que o Ricardo tomou 25 por multiplicador, e a sua estratégia foi decompor 25 em 10+10+5 para depois usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Assim, começa por escrever 30 e, porque em 20 “cabem dois [10], então acrescentei um zero, e depois, (…), acrescentei outro zero". O obteve 3000 e a este número adiciona 150 que resulta da multiplicação de 30 por 5. O erro de que o Ricardo não se apercebe é que ao acrescentar dois zeros a 30 está a multiplicar por 100, ou, de outro modo, quando acrescenta o segundo zero já não está a multiplicar 30 por 10, mas 300 por 10. Portanto, em vez de fazer 30×10+30×10+30×5, o Ricardo fez 30×10×10+30×5. A Figura 26 mostra o registo da resolução da tarefa. A lista vertical dos múltiplos de 30 corresponde ao processo para determinar 5×30 (contagem de 30 e 30).

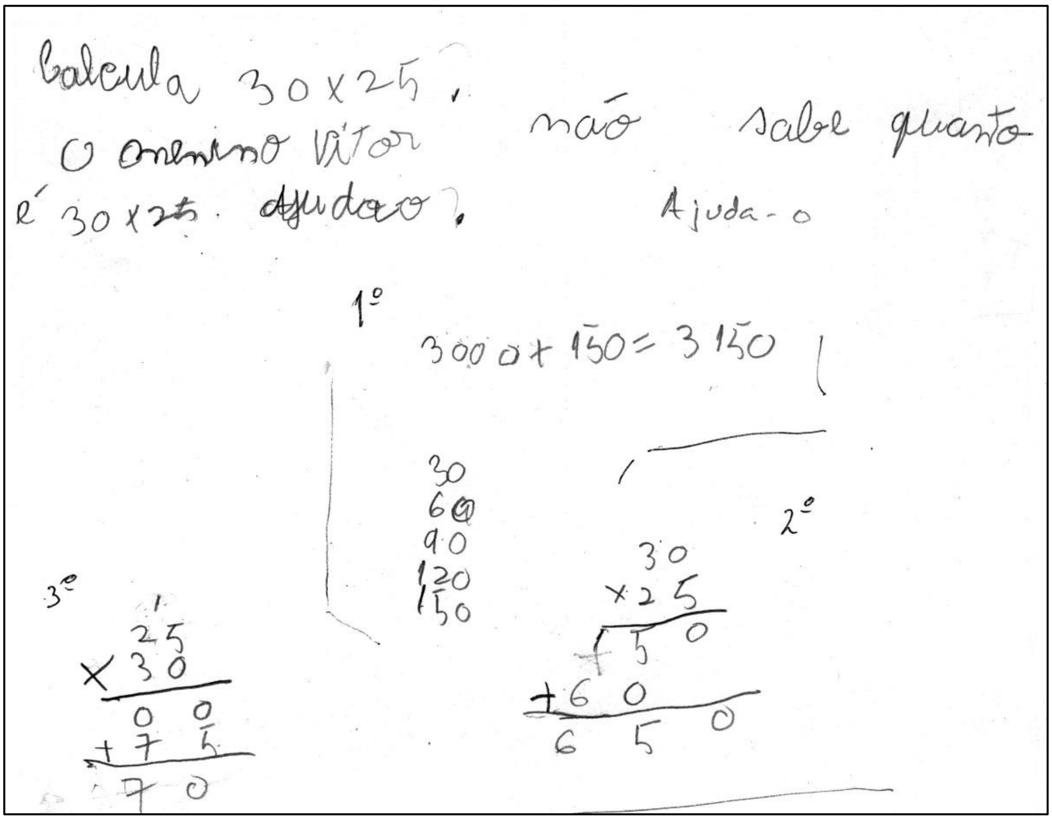


Figura 26: Resolução da tarefa "30×25" feita pelo Ricardo.

Tendo concluído o primeiro cálculo, obtendo 3150, o investigador sugere que utilize o algoritmo. Neste (à direita na Figura 26) só cometeu um erro na adição dos produtos parciais, talvez por não estarem devidamente alinhados (6 debaixo de 1) e depois de dar conta que o resultado é diferente do primeiro cálculo propôs "Mas deixa-me só ver uma coisa, se ao contrário também vai dar o mesmo" e faz o algoritmo que está à esquerda na Figura 26. Neste, o erro cometido está em não ter considerado que o produto de três dezenas por vinte e cinco é 750 e não 75. Esqueceu-se de marcar o lugar do zero nas unidades do segundo produto parcial, algo que não se esqueceu de fazer quando fez no algoritmo anterior[35]. Aquando da correção dos algoritmos, o Ricardo soube explicar

[35] E também se enganou quando adicionou os dois produtos parciais, registando 70 e não 75.

porque deixou um espaço à direita de 60 no primeiro algoritmo que fez: “É porque a professora disse que não se pode… finge-se que se tem aqui um zero” e reconhece que se esqueceu de o fazer no segundo algoritmo.

Naturalmente que a entrevista prosseguiu com a correção dos cálculos identificando onde e como foram cometidos os erros.

8.5.3. A Tarefa “Caixas de Pastéis”

O Ricardo lê o enunciado da tarefa sem grandes hesitações (Figura 15, pág. 83). Faz uma leitura linha a linha dos dados da tabela, ou seja, lê primeiro a sequência referente ao número de caixas de pastéis e, posteriormente, a sequência que diz respeito ao número de pastéis embalados.

> Ricardo – Inventar problemas… Os pais do António têm uma pastelaria, um dia, ele esteve a ajudar o pai a embalar uns pastéis, que são vendidos em caixas iguais. À medida que ia colocando os pastéis nas caixas, o António ia escrevendo: número de caixas: quatro, oito, dezasseis; número de pastéis embalados, dezasseis, trinta e dois, sessenta e quatro. Faz uma pergunta para um problema que seja resolvido com uma multiplicação. [pausa]

Após a leitura fica em silêncio, percorrendo o enunciado com os olhos, atitude que leva o investigador a perguntar se tinha entendido a tarefa:

> INV. – Entendeste o problema todo?
>
> Ricardo – Ah?
>
> INV. – Entendeste tudo?
>
> Ricardo – Mais ou menos. [pausa]
>
> INV. – Queres fazer alguma pergunta antes de fazeres a pergunta do problema?
>
> Ricardo – Estes números são o quê? [aponta os números apresentados na tabela]
>
> INV. – Não consegues entender o que esses números são?
>
> Ricardo – Os números das caixas?
>
> INV. – Este aqui, o quatro, por exemplo, é o quê?
>
> Ricardo – Número de caixas?
>
> INV. – É o número de caixas, não é? E este dezasseis que está aqui em baixo?
>
> Ricardo – Ah! É o que está lá dentro.
>
> INV. – O que está dentro das…?
>
> Ricardo – Caixas.
>
> INV. – De quantas caixas?
>
> Ricardo – Quatro.

INV. – De quatro caixas. E aqui? Isto…

Ricardo – Os trinta e dois que estão em oito.

INV. – Os trinta e dois pastéis que estão em oito caixas. Hum, hum. Já entendeste então?

Ricardo – Sim.

O diálogo acima dá a entender que o Ricardo não percebeu imediatamente o modo como os dados foram apresentados, talvez se possa até dizer que não deu conta de que se tratava de uma tabela. Esta interpretação é plausível porque nas atividades escolares em sala de aula, por norma, as tabelas têm os limites definidos, tanto os limites exteriores como interiores, individualizando cada célula. Na continuação do diálogo percebe-se que o reconhecimento da tabela e as respetivas regras de alinhamento entre os dados numéricos apresentados não foi difícil. O Ricardo precisava mais de uma confirmação do seu entendimento do que de uma explicação sobre algo totalmente novo.

O diálogo abaixo mostra a primeira pergunta formulada pelo Ricardo e a conclusão posterior sobre essa mesma pergunta.

Ricardo – Em duas caixas quantos pastéis são embalados?

INV. – Hum, hum. Porquê? Ahh, porque é que tu achas que isso se resolve com uma multiplicação? Ou, qual é a multiplicação que resolve isso?

Ricardo – Não, isto é a dividir. Não, isto é porque assim… já é ahh… pode-se fazer uma conta de menos. Assim, a partir deste lado é de menos, [aponta o lápis para a esquerda dos dados numéricos da tabela] para aqui já é de menos, e assim é a aumentar [apontando para a direita].

Observa-se que o Ricardo se expressou em termos aditivos quando expôs o seu entendimento sobre a continuidade dos dados numéricos na tabela. No entanto, também afirmou que a sua pergunta se resolvia por meio de uma divisão; disse divisão em primeiro lugar e depois subtração. Quando disse divisão poderia estar a referir-se ao facto de 2, o número que escolheu para a sua pergunta, ser metade de 4, o primeiro dado na tabela. Contudo, mais adiante ele voltará a usar expressões de caráter aditivo ao referir-se a relações entre os dados apresentados. Por exemplo, quando voltou a falar da sua primeira pergunta, "não dá porque agora estive a pensar que tem de se pôr…fazer a subtrair", ou quando falou da progressão dos dados numéricos na tabela "se andamos aqui para trás, é sempre a diminuir". Apesar disso, o Ricardo escolheu números que se relacionam multiplicativamente com os dados no enunciado, tanto nesta sua primeira pergunta como na que fará a seguir.

Tendo rejeitado a sua primeira pergunta por não implicar uma divisão, o Ricardo formulou outra, já mais seguro que se resolveria por meio de uma multiplicação: "Em trinta e duas caixas quantos pastéis são embalados?" E explica a resolução:

INV. – Pronto, tu achas que a essa pergunta tu consegues responder com uma multiplicação? Com vezes.

Ricardo – Sim.

INV. – *Okay*. Queres responder então?

Ricardo – Ahh… era assim: dezasseis vezes dois…não, sessenta e quatro vezes dois.

INV. – Hum, hum. Porquê sessenta e quatro vezes dois?

Ricardo – Porque se este aqui é dezasseis, aqui fizemos vezes, aqui também tem de se aumentar.

INV. – Portanto tu…

Ricardo – Que era cento e vinte e oito.

Escolheu 32 para o número de caixas, duplicando o número 16, último dado numérico na linha das caixas, e diz a solução, 128 pastéis, duplicando os 64 pastéis contidos nas 16 caixas. Justifica ter escolhido 32 para a pergunta porque “dezasseis e dezasseis são trinta e dois, que fica mais óbvio…fica mais fácil.” Mais uma vez expressou-se aditivamente, embora anteriormente, no diálogo acima, se tenha expressado multiplicativamente quando deu a entender que multiplicou 16 por dois assim como 64: “era assim: dezasseis vezes dois…não, sessenta e quatro vezes dois”. A tendência de se expressar aditivamente revelou-se também na resolução, pois escreveu 64+64=128 como resolução do problema. Questionado sobre isto sorriu e disse “como isto é uma conta tão fácil, ahh… dá logo para fazer só com mais”, e acrescentou à resolução, por sua iniciativa, a multiplicação de 64 por 2, dispondo-a verticalmente em jeito de algoritmo.

No diálogo o Ricardo faz a duplicação de 64 sem qualquer indício de hesitação, sem fazer qualquer pausa. Por ter referido que escolhera o 32 por ser fácil, querendo verificar se o Ricardo voltaria a recorrer ao fator escalar para resolver o problema, o investigador incentivou-o a escolher outro número. O Ricardo escolheu o número 100. Escreveu a pergunta e quando se lhe pediu que passasse à resolução exclamou “Esta é um pouco mais difícil.”

A primeira explicitação da estratégia para resolver a questão sobre o número de pastéis em 100 caixas foi dita deste modo: “Eu sei uma estratégia que é mais ou menos assim: quarenta mais quarenta, que é o 10, oitenta. Mas como sei que a metade de quarenta é 20, depois adicionava tudo.” A explicação é extremamente sintética e não revela o suficiente para se perceber claramente o que pensou. De facto, era uma característica do Ricardo expressar-se de uma forma bastante sintética, deixando implícita uma boa parte do discurso. Ele próprio reconhece as suas dificuldades com a comunicação quando, na entrevista inicial, diz que a “português não me oriento muito bem”, e que “às vezes faço assim frases que não têm muito sentido.” É verdade que ainda durante a entrevista, mais para o final, o investigador conseguiu descobrir a que cálculos se estava a referir nesta sua primeira exposição da estratégia, mas isso não aconteceu em virtude do diálogo entre o investigador e o Ricardo. O investigador não o entendeu[36] de início e insistia que o Ricardo explicasse o significado[37] dos números que usava, algo que o Ricardo não conseguia fazer. No diálogo é possível observar que, por vezes, as intervenções do Ricardo não seguem as do investigador e vice-versa. O que é verdade é que o Ricardo descobriu o fator escalar que resolvia o problema sem conseguir explicar de um modo claro o processo que seguiu.

A seguir transcreve-se o diálogo que se seguiu à primeira explicação da estratégia que disse ter encontrado.

> Ricardo – Dá... Eu sei uma estratégia que é mais ou menos assim: quarenta mais quarenta, que é o dez, oitenta. Mas como sei que a metade de quarenta é vinte, depois adicionava tudo.
>
> INV. – Hum, hum. Não sei se estou a perceber bem a tua ideia mas vê lá. Consegues explicar melhor ou queres começar já a fazer?
>
> Ricardo – É assim. [regista na disposição de algoritmo 40×2=80 (Figura 27, na pág.185)]
>
> INV. – Mas quarenta vezes dois porquê?
>
> Ricardo – Porque é oitenta, não é? E depois como sei que quarenta… a metade… vezes cinco… é vinte… dá…e oitenta mais vinte dá cem.
>
> INV. – [pausa] Não consigo perceber o teu raciocínio. O que é este quarenta aqui?
>
> Ricardo – É assim… Aqui [aponta 4 caixas no enunciado] como eu sei que na tabuada vezes dez é quarenta…
>
> INV. – Sim.
>
> Ricardo – Aqui [aponta o algoritmo 40×2=80]… quarenta vezes dois dá oitenta… depois…
>
> INV. – Hum…
>
> Ricardo – A metade é vinte.
>
> INV. – A metade?
>
> Ricardo – Que é vezes cinco.
>
> INV. – Não percebo.
>
> Ricardo – Então é vinte e cinco.
>
> INV. – Tu já sabes… tu já sabes quantos pastéis…

[36] É de interesse didático denunciar e sublinhar esta dificuldade, porque a divergência nos sentidos dados por professor e aluno ao discurso pode facilmente conduzir à desconsideração do aluno em várias dimensões.

[37] A insistência do investigador no significado dos números era necessária tendo em conta a posição marcada por autores como Schwartz (1988), ou até mesmo por Gerard Vergnaud na teoria dos campos conceptuais, nomeadamente no campo das estruturas multiplicativas.

Ricardo – Ahh… vai dar vinte e cinco.

Na transcrição acima percebe-se que 40 é obtido pela multiplicação de 4 (pastéis) por 10 e que 80 resulta da duplicação de 40. O que não se entende tão facilmente é a origem do número 20. A sequência “sei que quarenta… a metade… vezes cinco… é vinte” parece sugerir que o Ricardo estava a dizer que 40 vezes 5 é 20. Mas pode ser interpretada como uma afirmação de que vinte é metade de quarenta, que é quatro vezes cinco. Ou seja, ‘sei que a metade de quarenta, que é quatro vezes cinco, é vinte’. No conjunto, pode inferir-se que 80 resulta da multiplicação de 4 por 10 e por 2, isto é, por vinte; e que a 80 é adicionado o número 20 que resulta da multiplicação de 4 por 5. No final, 4 foi multiplicado 25 vezes, $(4\times10\times2) + (4\times5) = 4\times(20+5)$, que é o escalar que pode transformar os 16 pastéis contidos nas 4 caixas em 400 pastéis contidos em 100 caixas. No entanto, o Ricardo não usa o fator escalar que encontrou para multiplicar 16 pastéis, e parece dizer, no diálogo, que a resposta é vinte e cinco. A Figura 27 mostra o registo feito pelo Ricardo, mas é preciso ter em atenção que tal registo não foi feito de uma só vez, antes foi realizado à medida que ia explicando.

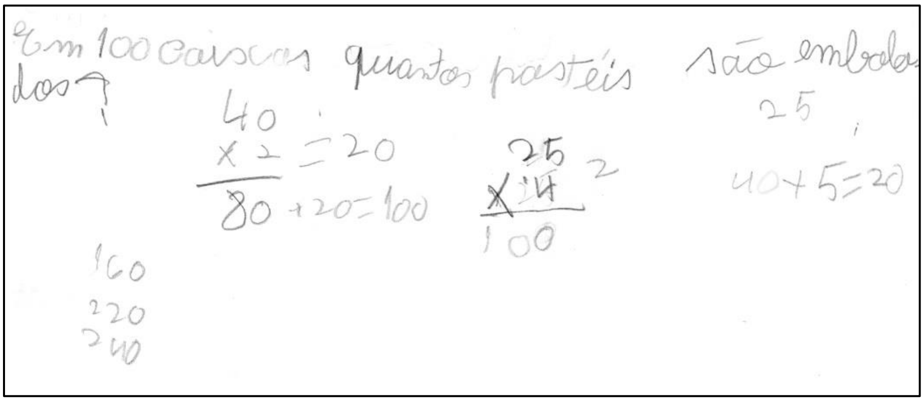


Figura 27: Resolução da pergunta "Em 100 caixas quantos pastéis são embalados?" feita pelo Ricardo, referente à tarefa "Caixas de Pastéis".

A primeira operação, feita durante o diálogo anteriormente transcrito, foi $40\times2=80$. Depois prosseguiu respondendo ao pedido de que explique melhor: “Ahh… quarenta vezes dois é oitenta. Isso já sabemos… que é igual ao vinte”. Dito isto escreve =20 ao lado do 2 no algoritmo de $40\times2=80$. Deduz-se que este 20 corresponde ao multiplicador composto pelas duas multiplicações anteriores, primeiro por 10 e depois por 2.

Prosseguindo a explicação, o Ricardo disse, escrevendo $40\times5=20$: “E depois, com quarenta vezes cinco… é…é igual a vinte… mas aqui é vezes cinco, não é?” Esta expressão, que se vê no registo, está errada, mas é preciso considerar que ao ter dito “mas aqui é vezes cinco” está a sublinhar, a chamar a atenção, para a multiplicação por cinco, tal como chamou a atenção para a multiplicação por 20. São estes dois multiplicadores que resultarão em 25 pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Continuou dizendo "Depois, oitenta mais vinte… igual ao cem" e escreve +20=100 ao lado do 80 no algoritmo. Este 20 que adiciona a 80 corresponde à multiplicação (de quatro e não de 40) por cinco. São, portanto, 20 caixas adicionadas a 80 caixas, perfazendo 100 caixas, número incluído na pergunta que formulou.

Relativamente ao registo na Figura 27 falta ainda esclarecer a operação 25×4=100 e os três números 160, 220 e 240 dispostos em lista. A operação 25×4=100 foi feita respondendo à questão:

> INV. – [pausa longa] Então diz-me lá uma coisa: tu já sabes a resposta? Quantos pastéis ficam em cem caixas?
>
> Ricardo – Ahh… Ahh ainda não fiz a conta. [efetua o cálculo 25×4=100: primeiro coloca 4 em cima e 25 em baixo. Depois apaga e inverte] Isto é o embalamento que sei que está certo.

O Ricardo acabou por usar uma expressão inesperada e difícil de entender para indicar o significado de vinte e cinco: "Isto é o embalamento que sei que está certo." A expressão "embalamento" traduziria a ação de embalar e, compreende-se agora, é uma forma alegórica de se referir ao fator escalar.

A plausibilidade de que o Ricardo se estivesse a referir a 25 como fator escalar vem da afirmação que fez: "Se em quatro são dezasseis, é… dezasseis vezes vinte e cinco!" Mas apesar disto ele não usou 25 para resolver o problema, fazendo explicitamente 25×16. O que fez foi seguir mentalmente o mesmo processo que já tinha usado para obter 100.

O registo correspondente a este processo pode ver-se na sequência de números dispostos verticalmente na Figura 27: multiplica 16 por dez e escreve 160; duplica 160, mas erradamente escreve 220 (em vez de 320) e, por último, adiciona 20 (o mesmo que tinha adicionado a 80 caixas) em vez de adicionar 80 que corresponderia a 5×16.

O erro de adicionar 20 em vez de adicionar 80 tem a ver com a propriedade do isomorfismo respeitante à adição: em 20 caixas estão 80 pastéis; se a 80 caixas adiciono 20, aos pastéis contidos nas 80 caixas tenho de adicionar os pastéis contidos nas 20 caixas. A Figura 28 ilustra o processo e os erros que estão registados em cor vermelha.

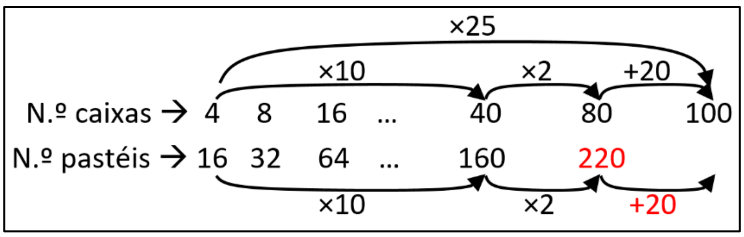


Figura 28: Identificação do erro do Ricardo para encontrar o número de pastéis contidos em 100 caixas.

O erro que é significativo na utilização do procedimento escalar é a adição de 20 na linha de dados referentes ao número de pastéis.

A análise da resolução desta pergunta, sobre o número de pastéis em 100 caixas, permite confirmar a tendência do Ricardo para recorrer ao escalar. Ou seja, apesar do número 100 proporcionar uma resolução mais fácil por recurso à relação funcional, isto é, sabendo que em 1 caixa há quatro pastéis, em 100 é quatro vezes mais, o Ricardo aposta na descoberta de um escalar que não é fácil de determinar. No meio do processo, quando tem de adicionar em número de pastéis o correspondente ao número de caixas, o Ricardo não respeita a propriedade do isomorfismo e adiciona o mesmo número, tanto em caixas como em pastéis.

Em todo este processo está bem visível o recurso ao cálculo mental em vez de um processo mais metódico de registo cuidado de todos os cálculos e respetivos referentes.

8.5.4. A Tarefa: “3×6=18”

Ao contrário dos seus colegas, o Ricardo escolheu uma expressão com fator em falta para começar. No entanto, a sua primeira formulação é semelhante à que tinha sido feita na entrevista com a tarefa que envolvia formular o contexto para a expressão 30×25: “Qual é o número [que] vezes seis que dá dezoito?” Explicou-se então que a formulação que tinha feito servia para qualquer operação e que o objetivo era formular uma história que tivesse a ver com a expressão numérica.

No seguimento da clarificação do objetivo da tarefa, o Ricardo decide, então, selecionar 3×?=18.

> Ricardo – O Vítor tinha três amigos e cada amigo deu-lhe três... Não, deu-lhe... Deu-lhe um número de carros. E o Vítor viu que todos deram o mesmo número.
>
> INV. – E o Vítor viu que todos deram o mesmo número.
>
> Ricardo – Quantos deu cada amigo?
>
> INV. – Portanto, o Vítor tinha três amigos, cada amigo deu-lhe um número de carros, não é? Nós não sabemos quanto é que cada um deu... Mas falta dar outro dado neste problema. Qual é o dado que tu tens que dar aqui ao problema?
>
> Ricardo – Ah, cada amigo deu o mesmo...
>
> INV. – Sim, cada amigo deu o mesmo, isso já disseste. Mas falta-nos um dado para conseguir resolver esse problema que inventaste.
>
> Ricardo – E a soma foi dezoito.

Pode observar-se que o enunciado não foi produzido de uma forma completa de uma só vez. No entanto, verifica-se que não há grandes hesitações, isto é, avanços e recuos ou emendas substantivas, na formulação da situação. O Ricardo mostra-se razoavelmente seguro dos dados e condições que quer dar à situação, apenas não a formula com a desejável fluência. Esta característica é consistente com a própria consciência que o Ricardo tem das suas dificuldades no Português, as quais, aliás, sabe identificar. Uma redação mais adequada sintaticamente foi negociada de seguida tendo ficado assim estabelecido: "O Vítor tinha três amigos e cada amigo deu-lhe um número de carros. Ele viu que todos deram o mesmo número e a sua soma foi dezoito. Quantos carros deu cada amigo?"

É uma situação que, envolvendo quantidades discretas, se situa na classe de Grupos iguais definida por Greer (1992). A resolução é modelada pela divisão de partilha equitativa, a qual, expressa no enquadramento de Schwartz (1988) pode ser simbolicamente representada por E'÷E=I, isto é, a quantidade extensiva 18 carros dividida pela quantidade extensiva 3 amigos resulta num quociente que é uma quantidade intensiva, pois descreve o número de carros dado por cada amigo.

É de sublinhar o cuidado tido pelo Ricardo em especificar, logo de início, que todos os amigos deram o mesmo número de carros, afirmação esta que valida o carater multiplicativo da situação.

Para a expressão 3×6=? o Ricardo mantém os referentes dados aos números na formulação anterior e diz "O Vítor tinha três amigos e cada amigo deu... e cada amigo deu-lhe seis carrinhos. Com quantos carrinhos ficou o Vítor?" Voltou a manter os referentes na formulação do problema para a expressão ?×6=18, mas desta vez faz uma certa confusão no primeiro ensaio:

> Ricardo – [pausa] Hum... O Vítor sabe que cada amigo deu-lhe seis e a soma foi dezoito. Quantos carrinhos deu cada um dos três amigos?
>
> INV. – Repara, nessa pergunta já estás a dizer! Olha aqui [aponto a expressão]. Disseste bem, mas pensa lá um bocadinho, está bem? Porque é assim, tu não podes dizer este número [indico o ponto de interrogação].
>
> Ricardo – O três.
>
> INV. – Este é o número que tu queres perguntar. Portanto...
>
> Ricardo – O Vítor ficou com dezoito carrinhos.
>
> INV. – Dezoito carrinhos.
>
> Ricardo – E sabe que cada amigo deu-lhe seis carros. Quantos amigos tinha o Vítor?

A confusão que faz no primeiro ensaio para formular o problema está na pergunta, na qual comete dois erros: informa que são três os amigos que lhe deram os carrinhos, informação essa que devia constituir-se como incógnita, e faz incidir a pergunta sobre uma informação que já está presente na frase anterior – o número de carrinhos dado por cada amigo. Desta vez não se procedeu a uma reformulação que desse ao enunciado uma melhor construção do ponto de vista sintático. Extraída diretamente do diálogo, o enunciado é "O Vítor ficou com dezoito carrinhos. E sabe que cada amigo deu-lhe seis carros. Quantos amigos tinha o Vítor?” A correção mínima a fazer podia incidir apenas na primeira frase: O Vítor recebeu dezoito carrinhos de uns amigos.

Tendo-se mantido o mesmo contexto, a situação enquadra-se nas mesmas categorias que as anteriores exceto no que diz respeito à divisão que resolve o problema. Usando o enquadramento de Schwartz representa-se por E’÷I=E, isto é, a quantidade extensiva 18 carrinhos divide-se pela quantidade intensiva 6 carrinhos cada amigo, resultando num quociente que é uma quantidade extensiva: o número de amigos. É uma divisão com sentido de medida ou agrupamento.

A manutenção dos referentes (3 amigos, 6 carrinhos cada e 18 carrinhos no total) atribuídos aos números contidos na expressão numérica permitiu que as divisões que resolvem as expressões ?×6=18 e 3×?=18 tenham sentidos diferentes, respetivamente, sentido de medida e sentido de partilha equitativa.

8.5.5. A Tarefa: “Caixas de gelados”

Quando foi entregue o enunciado da tarefa (Figura 18, pág. 88), pediu-se ao Ricardo que fizesse as todas as perguntas que achava mais interessantes. O Ricardo lê o enunciado da tarefa e começa imediatamente a resolver. Escreve cinco perguntas sem qualquer interrupção.

1) Quanto dinheiro custava um gelado?
2) Quanto dinheiro custava a caixa dos seis gelados?
3) Se não houvesse a promoção de levar três caixas e pagar duas quanto dinheiro custava [uma caixa]?
4) O pai do Francisco pagou com uma nota de vinte euros. Quanto dinheiro recebeu de troco?
5) E se pagasse com uma nota de duzentos euros quanto dinheiro receberia de troco?

Assim que terminou, pediu-se-lhe que lesse as perguntas que tinha feito. Quando leu a pergunta “Quanto dinheiro custava a caixa dos seis gelados?” acrescentou “Que era multiplicar por seis” o custo de um gelado. Revelou não só que conhecia já o processo de resolução, como também que a resolução dependia da resposta à primeira pergunta. Mais adiante explicou que tinha feito a pensar nas *contas* que a resolução exigiria: primeiro uma de divisão e depois de multiplicação. No entanto, nesta altura, não lhe foi pedido que explicasse a inclusão do número 6. Apenas se pediu que explicasse a que se referia a sua terceira pergunta. O pedido foi colocado deste modo: “Quanto dinheiro custava… não dizes o quê.” Responde que se refere ao custo de uma caixa. Esta especificação foi então acrescentada à pergunta, ficando registada “Se não houvesse a promoção de levar três caixas e pagar duas quanto dinheiro custava uma caixa?”

Quando se passou à resolução dos problemas colocados pelas perguntas que fez, começou-se, naturalmente pela primeira. O Ricardo resolveu-a em silêncio, recorrendo ao algoritmo, dividindo

7,20€ por 24. Não mostrou dúvidas quanto aos dados a relacionar no processo de encontrar a resposta. Somente a execução do algoritmo suscitou dificuldades.

É importante mostrar agora a dificuldade que manifestou na realização do algoritmo pois será recorrente nos restantes cálculos em que estiveram envolvidos números não inteiros. No dividendo escreveu 7,20 e determinou que 24 cabia 3 vezes em 72; escreveu, corretamente, 3 no quociente e zero por baixo do algarismo 2 do dividendo; de seguida "baixou" o zero do dividendo mas não escreveu o zero no quociente. Questionado, explicou:

INV. – E agora fica quanto? Fica três euros?

Ricardo – Não.

INV. – Não pode ficar.

Ricardo – Pois não… É trinta cêntimos…

INV. – Porquê?

Ricardo – Porque aqui não cabe nenhuma, tem que se acrescentar um zero… Então aqui o zero, não cabe nenhuma, então põe-se um zero… Depois zero vezes vinte e quatro é zero.

INV. – Pronto, e acabaste a conta?

Ricardo – Sim.

INV. – Então, se isto aqui são 30 cêntimos, onde é que pões a vírgula? Tens de pôr a vírgula e a unidade em algum lado.

Ricardo – Pois é.

INV. – Aonde?

Ricardo – [aponta, entre o 3 e o 0]

INV. – Mas isso assim fica 30 cêntimos?

Ricardo – Não. Não pode, tem de ser à frente.

Neste diálogo observa-se que a dificuldade foi parcialmente resolvida pelo Ricardo, invocando o procedimento correto que tinha sido esquecido para terminar a operação, mas no que diz respeito à colocação da vírgula o aluno não mostra conhecimento. A dificuldade é ultrapassada por tentativa e erro.

Passou-se à resolução da segunda pergunta e é nesta altura do diálogo que se lhe pede a razão para ter escrito "6 gelados".

INV. – Pronto. Pergunta dois. Quanto dinheiro custava a caixa dos seis gelados.

Ricardo – É trinta, os trinta cêntimos vezes os seis.

INV. – Espera só um bocadinho. Tu, quando dizes que a caixa é de 6 gelados…

Ricardo – Sim.

INV. – Como é que soubeste disso?

Ricardo – Pois. [pausa] Eu inventei.

INV. – Tu inventaste uma caixa de seis gelados?

Ricardo – Sim.

Realizou o cálculo mentalmente, indicando horizontalmente 6×0,30 e dizendo que, como 6×10 era 60, então 6×30 era 180. A dificuldade manifestou-se quando colocou a vírgula no produto: escreveu 18,0 e disse que era 18 euros o custo da caixa. Interrogado, emendou para um euro e oitenta explicando, "Porque se fosse 18 euros era caríssimo e está aqui a dizer que era uma promoção." Mais uma vez se verifica a dificuldade em lidar com a vírgula, mas agora para determinar um produto. Não domina com segurança o procedimento, no que se refere a este pormenor, mas desta vez suprime a dificuldade recorrendo ao sentido crítico do número no contexto.

Na resolução da terceira pergunta, "Se não houvesse a promoção de levar três caixas e pagar duas, quanto dinheiro custava uma caixa?", o Ricardo, apesar dos indícios de insegurança percetíveis no diálogo, parece mostrar que conhece o processo para resolver o problema. Este aluno (a par do Daniel) formulou, à partida, uma pergunta que põe em jogo a condição promocional. No diálogo que se apresenta de seguida pode-se observar que inicialmente o Ricardo parece enunciar corretamente o efeito da promoção na aquisição das 6 caixas.

Ricardo – Então... [Pausa] Então, ele então aqui só pagou duas caixas.

INV. – Hum.

Ricardo – Porque levou três e pagou, e pagou duas. Então só pagou duas caixas.

INV. – Mas ele trouxe seis caixas.

Ricardo – [Pausa] Então ele pagou quatro.

INV. – Hum. Porquê quatro?

Ricardo – Ele... ele aqui… seis caixas, e depois se levou três... três e três são seis.

Parece conseguir entender e estender o efeito da promoção "leve três caixas e pague duas" para " leve seis caixas e pague quatro". No entanto, abandona o rumo a que tal entendimento poderia conduzir (dividir 7,20 por 4) assim que é questionado sobre o significado dos dados que enuncia.

INV. – [Pausa] Explica lá melhor o que estás a pensar.

Ricardo – [Pausa] Ah! Não, não, não. Porque aqui não pede, porque aqui, isto não... faz nada. Aqui só pede uma. Se não houvesse... Que dinheiro custava uma. Então, temos as três caixas… a pagar duas.

INV. – Só paga duas caixas?

Ricardo – [Pausa] Ahh, então este 7,20 foram as duas caixas. [Pausa] Estão é 3 euros e 60 cada caixa. Porque… se os 7,20 ele pagou as duas, então é 3 euros e 60...

INV. – Três euros e 60 cada caixa?

Ricardo – Sim.

Apesar da mudança de processo, abandonar a divisão de 7,20 por 4 e optar por dividir 7,20 por 2, há, aparentemente, indícios suficientes para se inferir que o Ricardo sabe que, para encontrar o custo de uma caixa se não houvesse promoção, deve dividir o gasto total pelo número de caixas efetivamente pagas, uma vez que o faz para as duas caixas efetivamente pagas em três adquiridas. Depois de entendido que o processo correto passaria pela divisão por 4 caixas, dá-se outro incidente revelador da aparente dificuldade na interpretação do efeito da condição promocional no custo a pagar se não houvesse promoção.

INV. – Portanto, quando a promoção diz: leve três paga duas, se uma pessoa levar três…

Ricardo – Paga duas.

INV. – Se levar seis…

Ricardo – Paga quatro.

INV. – *Okay*?

Ricardo – Então os sete e vinte tenho de dividir por seis.

INV. – Para saber o quê?

Ricardo – Para saber quanto... se não houvesse a promoção. Porque aqui não... se fosse, se houvesse a promoção era a dividir por quatro, como não havia, era a dividir por seis. Todos pagavam… tinha-se de acrescentar mais dinheiro.

A última intervenção neste trecho do diálogo permite perceber a interpretação legítima do Ricardo: havendo promoção, a condição estabelece que só se pagam 4 caixas; retirada a promoção é necessário pagar todas. Este episódio mostra como é, de facto, difícil lidar com estas relações: não havendo promoção teriam de ser pagas as 6 caixas, mas para saber o preço de uma não se pode dividir por 6.

Já que acima se fez referência às suas dificuldades em lidar com o cálculo nos algoritmos, convém agora notar a facilidade com que encontrou mentalmente a metade de 7,20€.

As suas últimas duas perguntas não envolvem a estrutura multiplicativa, não tendo sido, por isso, analisadas.

8.5.6. Síntese

Neste ponto pretende-se expor o que se considerou significativo no conjunto dos dados acima apresentados referentes ao Ricardo. Esta síntese organiza-se essencialmente em três tabelas.

Na Tabela 17 (pág. 194), estão os dados que se referem às opiniões ou conceções e preferências manifestadas pelo Ricardo sobre a sua pessoa, sobre a resolução e formulação de problemas.

Na Tabela 18 (pág. 195), apresentam-se os dados referentes à formulação de problema a partir de expressões numérica (“30×25” e “3×6=18”) e ao problema formulado sem restrições como sendo o seu preferido. Na primeira coluna está o enunciado inventado. Na segunda, o sentido do contexto, de acordo com Greer (1992). Na terceira coluna, designada Formulação, está a indicação da origem do problema, o que esteve na base da formulação. Na quarta coluna é revelada o modo de resolução, que só faz sentido ser apresentado para a resolução da expressão 30×25 e para a resolução do problema formulado livremente; na última coluna estão anotações sobre algum aspeto relevante.

Na Tabela 19 (pág. 196), estão os dados referentes à resolução das tarefas de tipo *Traduzir* e *Editar* (“Caixas de pastéis” e “Caixas de gelados”). Esta tabela apresenta na primeira coluna, “Comentário ao enunciado”, que se refere ao que o aluno disse ou fez logo após a leitura do enunciado da tarefa. Isto é significativo porque se verifica que tem relação com as perguntas formuladas e com o processo de formulação. Na segunda coluna estão as perguntas formuladas, apenas aquelas que foram feitas antes de qualquer intervenção do investigador. A terceira coluna refere-se à origem ou processo de formulação. Na quarta coluna está o processo de resolução.

O Ricardo não foi capaz de apontar imediatamente o nível de desempenho em que se encontrava (Tabela 17, na pág.194). Referiu-se à Isabel como uma colega que estariam a um nível menos bom e ao Daniel e Madalena como estando num nível dos bons. Só respondeu “sim” quando se lhe perguntou se estaria entre um grupo e outro. Esta sua hesitação pode dever-se a diversos motivos. Estava com certeza relacionada com o reconhecimento das suas dificuldades, que, aliás, explicitou, tanto ao nível do Português como da Matemática, embora pudesse ter de si uma ideia geral mais positiva.

A referência do Ricardo às suas dificuldades a Português é significativa por alinhar com o facto de ter evitado a elaboração de histórias na formulação de problemas. E como se pode observar, nos contextos que inventou, ainda que as entrevistas estejam separadas por um período de um mês, os referentes dos números envolvidos são invariavelmente “carrinhos”.

É importante sublinhar o contraste entre um aspeto aparentemente negativo, a dificuldade na criação de histórias manifestada na utilização dos mesmos referentes atribuídos aos números na tarefa “3×6=18”, e o feito consequente da formulação de duas situações de divisão com sentidos diferentes: divisão de partilha equitativa e divisão de agrupamento ou medida (Tabela 18). É importante não porque tal feito se deva a um saber fazer do Ricardo, mas porque esta possibilidade é didaticamente significativa no que se refere à formulação de problemas.

Tabela 17:Resumo dos resultados relacionados com opiniões e conceções do Ricardo sobre o desempenho, as matérias escolares, a resolução e a formulação de problemas.

	Considerações explícitas do aluno	Observações
Desempenho	Não foi assertivo quanto ao nível em que se colocava: aceitou colocar-se num nível intermédio entre os bons e os menos bons.	A Isabel considerava-o um aluno de nível médio, onde também se situava. A Madalena considerava-o um aluno com dificuldades a par da Isabel. O Daniel não o mencionou quando apontou a Isabel como tendo dificuldades.
Preferências Temas	Preferia a Matemática ao Português pelas dificuldades que tinha nesta área, sobretudo na escrita. Gostava de OTD[38], que associava ao Estudo do Meio. Gostava menos de Geometria e Medida porque tinha de decorar.	Evitava a elaboração de contexto nas tarefas que o exigiam. Nos contextos que inventava usava invariavelmente um mesmo referente: carrinhos.
Tópicos	Gostava sobretudo de operações (adição e multiplicação) e de cálculo mental. Refere as operações (divisão), o diagrama de caule-e-folhas e a numeração romana como aprendizagens significativas.	A adição apareceu no problema que formulou livremente. A multiplicação apareceu referida com gosto na execução da prova real da divisão (na tarefa "Caixas de Gelados").
Resolução de problemas	O interesse de um problema podia residir na história ou nos números envolvidos. Não gostava de problemas óbvios, mas dos que envolviam cálculos que conseguia resolver mentalmente.	O enunciado do problema que formulou como sendo o seu preferido envolvia números da sua data de aniversário.
	Achava difícil explicar como raciocinava para resolver um problema.	O seu discurso era pouco claro, com frequente omissão de conteúdo que subentendia.
Formulação de problemas	Não gostava de inventar problemas porque não tinha jeito para inventar histórias. Se tinha de inventar preferia fazê-lo a partir de dados já fornecidos. Não considerava importante a invenção de problemas em Matemática, o que era importante era saber resolver problemas.	Mostrou melhor participação na resolução das tarefas onde o contexto era fornecido e onde apenas tinha de formular as perguntas.

[38] Organização e Tratamento de Dados.

Tabela 18: Síntese dos resultados obtidos do Ricardo nas tarefas de formulação baseadas em expressões numéricas e no problema de formulação livre.

Tarefa	Enunciado	Sentido do contexto	Formulação	Resolução	Anotações
“30×25” 2014 maio 16	“O menino Vítor não sabe quanto é 30×25. Ajuda-o.”	—	Formulou este porque tinha poucas palavras.	Cálculo mental e algoritmo (comete erros nos dois processos)	Pouco gosto pela invenção de histórias.
“Livre” 2014 outubro 23	“O Luís tem 28 carrinhos e disse à mãe que quando fizer anos quer ter mais 2005 carrinhos. Com quantos carros ficará?”	Juntar (adição)	O problema nasceu do gosto pela adição e pelos números envolvidos (data de aniversário).	Cálculo mental	Monotonia nos contextos que inventava: apareciam repetidamente os mesmos referentes.
“3×6=18” 2014 dezembro 2	3×?=18 “O Vítor tinha três amigos e cada amigo deu-lhe um número de carros. Ele viu que todos deram o mesmo número e a sua soma foi dezoito. Quantos carros deu cada amigo?” 3×6=? “O Vítor tinha três amigos e cada amigo deu... e cada amigo deu-lhe seis carrinhos. Com quantos carrinhos ficou o Vítor?” ?×6=18 “O Vítor ficou com dezoito carrinhos. E sabe que cada amigo deu-lhe seis carros. Quantos amigos tinha o Vítor?”	Partilha equitativa Grupos iguais Medida ou agrupamento	Considerou que os problemas são óbvios, com cálculos simples.	—	A manutenção dos referentes conduziu à diversidade de sentidos dos problemas.

Tabela 19: Síntese dos resultados obtidos do Ricardo nas tarefas de formulação baseadas em contextos.

Tarefa	Comentário ao enunciado	Perguntas enunciadas	Formulação	Resolução
“Caixas de Pastéis” 2014 outubro 9	Manifesta dúvida na interpretação dos dados apresentados em tabela. Explicitação aditiva das relações multiplicativas: - para a esq é menos, (dividir) - para a dta é mais, (multiplicar)	1. “Em duas caixas quantos pastéis são embalados?” 2. “Em trinta e duas caixas quantos pastéis são embalados?”	Formulação por antecipação da resolução pela relação escalar. 1. Número de pastéis em metade de 4 caixas. 2. Número de pastéis no dobro de 16 caixas. (i.e. seleção de números regidos por relações escalares apesar do uso de expressões aditivas para relacionar os dados)	1. (Divisão) 2. Multiplicação pelo escalar: 2 × 64 pastéis (cálculo mental) Persiste no procedimento escalar para calcular o n.º de pastéis em 100 caixas apesar de saber o número de pastéis por caixa. Comete um erro na aplicação da propriedade do isomorfismo.
“Caixas de Gelados” 2015 janeiro 6	Inicia a formulação das perguntas sem qualquer outra reação prévia.	1. “Quanto dinheiro custava um gelado?” 2. “Quanto dinheiro custava a caixa dos seis gelados?” 3. “Se não houvesse a promoção de levar três caixas e pagar duas quanto dinheiro custava [uma caixa]?”	Formulação por antecipação das operações que devem ser efetuadas. A 2.ª pergunta depende da resposta à primeira Na 3.ª pergunta mostra-se ciente da promoção logo de início, e revela depois que tem uma resolução em mente.	1. Divisão: 7,20÷24 (algoritmo). 2. Multiplica por 6 o custo de um gelado determinado na 1ª pergunta. 3. De início mostra saber que só foram pagas 4 caixas, mas depois hesita. Domina o cálculo mental e escrito, mostra-se apenas inseguro na colocação da vírgula nos algoritmos.

Sobre a resolução de problemas o Ricardo afirmou que não gostava de problemas óbvios, isto é, ele gostava de ser desafiado, mas estabelece um limite dizendo que gostava dos problemas que conseguia resolver mentalmente. Esta afirmação condiz com o gosto manifestado também pelo cálculo mental.

Quanto à formulação de problemas afirmou que não gostava e não achava que fosse uma atividade importante em Matemática, pois considerava que o importante era saber resolver problemas. Esclareceu, no entanto, que não gostava porque não tinha jeito para inventar histórias. É de notar que este não gostar por não ter jeito para inventar pode ter uma relação com o gostar de problemas que sabe resolver. Ou seja, o gosto parece estar ligado ao sucesso obtido na atividade.

Tendo em conta a falta de gosto por inventar histórias e a consequente fuga à invenção de situações em tarefas de formulação de problemas para expressões numéricas, pode-se considerar que o Ricardo teve mais sucesso nas tarefas que solicitavam apenas a formulação de perguntas para contextos já definidos, isto é, nas tarefas “Caixas de pastéis” e “Caixas de gelados”.

Na tarefa “Caixas de Pastéis”, mostrou-se hesitante na interpretação dos dados numéricos apresentados na tabela. Posteriormente, apesar de se ter referido aditivamente à progressão das sequências de dados numéricos mostrados na tabela, a progressão do número de caixas e do número de pastéis nelas embalados, o Ricardo escolheu para a sua pergunta números que respeitavam relações multiplicativas (escalares).

A formulação das perguntas na tarefa “Caixas de Pastéis” surgiu no meio do processo de interpretação dos dados apresentados em tabela e teve em conta a possível resolução usando a relação escalar, ainda que essa relação escalar tenha sido descrita aditivamente, isto é, que 32 é igual a 16 *mais* 16 em vez de dizer que 32 é igual a duas *vezes* 16.

Para observar se a relação escalar estava bem entendida multiplicativamente e a descrição aditiva das relações tinha pouca ou nenhuma influência na utilização do processo para multiplicar, propôs-se ao Ricardo que escolhesse outro número de caixas. Escolheu determinar o número de pastéis em 100 caixas e ainda assim não usou a relação funcional de 4 pastéis por caixa, mas manteve o processo de resolução baseado na relação escalar. Contudo cometeu um erro fácil de compreender quando se usa o procedimento escalar e se tem de aplicar as propriedades do isomorfismo da função linear: verificando-se que a relação entre o número de caixas e de pastéis se mantém se se multiplicar um e outro pelo mesmo número, o erro consiste em pensar que se mantém a relação entre o número de caixas e de pastéis ainda que se adicione o mesmo número tanto às caixas como aos pastéis.

Na tarefa “Caixas de Gelados” o Ricardo não mostrou qualquer hesitação na interpretação do que lhe era pedido e formula as suas perguntas sem questionar. A segunda pergunta que fez mostra como ele pensou para formular as perguntas, pois a resolução depende da resposta à primeira. Ele mesmo explica que pensou primeiro numa operação e depois noutra "Como esta [apontando a pergunta] tens de dividir mas depois já tens que multiplicar." Isto é significativo porque mostra como esta segunda pergunta não foi feita a partir diretamente dos dados presentes no enunciado, mas dos que já pensava conseguir na resposta à primeira pergunta. Já a origem da terceira pergunta está ligada a uma possível resolução. O que aconteceu com o Ricardo na resolução desta terceira pergunta foi, talvez, semelhante ao que aconteceu na resolução da pergunta sobre o número de pastéis em cem caixas. É possível que tanto numa tarefa como na outra que ele tivesse uma interpretação correta dos dados e uma estratégia de resolução viável, mas os pedidos de esclarecimento dos raciocínios que verbalizava terão conduzido a hesitações e a confusões. As irregularidades no discurso oral tinham também uma correspondência no registo escrito como se pode verificar no registo do processo de resolução da pergunta sobre o número de pastéis em cem caixas. Algumas das expressões numéricas escritas parecem (e estão) erradas, mas na verdade elas não representam exatamente o significado socialmente veiculado, mas o significado que o Ricardo pretendia representar.

9. Resultados globais

O objetivo deste estudo foi descrever e compreender o modo como alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade se envolviam na resolução de tarefas de formulação de problemas, qual o conhecimento matemático que manifestavam e como o mobilizavam. As questões que orientaram esta investigação foram:

- Que processos de formulação de problemas utilizam ou explicitam os alunos?
- Qual é e como é mobilizado o conhecimento matemático na formulação de problemas?
- Que relações pode haver entre os processos de formulação de problemas que os alunos utilizam e o que eles pensam sobre as tarefas de formulação de problemas, os seus interesses e expectativas em relação a este tipo de tarefas?

A ideia central assumida neste estudo, e presente na segunda e terceira questão, foi a relação entre o conhecimento matemático e o processo de formulação dos problemas. Num estudo anterior (Almeida, 2011) apontava-se para uma relação de dependência onde parecia que os alunos formulavam apenas problemas que conseguiriam resolver, mas ficou por compreender o modo como o conhecimento matemático era mobilizado na formulação dos problemas, e a que processos os alunos recorriam para formular os problemas. Para delimitar e concentrar o âmbito do conhecimento matemático envolvido optou-se por ter em conta a multiplicação e divisão para as tarefas de formulação de problemas.

O que se pretende apresentar como resultados globais é uma visão de conjunto dos resultados obtidos dos quatro participantes. Nas sínteses que se apresentaram para cada participante encontrámos algumas respostas às questões colocadas nesta investigação, mas que se restringem à particularidade de cada caso. No entanto, a escolha de quatro participantes, com diferentes características em termos de desempenho escolar, permite ter uma visão global de onde se podem fazer observações e levantar questões que não se restringem à individualidade do participante.

É necessário apresentar o que há de particular e o que se mostra comum aos quatro participantes. Assim se contribuirá melhor para responder aos objetivos e questões desta investigação, tirar ilações mais gerais e colocar em evidência resultados que podem contribuir para levantar questões importantes. Também, embora este estudo não tenha um objetivo de contribuir explicitamente para orientações didáticas, nem tenha sido feito metodologicamente para isso, não deixará de suscitar reflexões inerentes à prática da formulação de problemas em aula.

Como já foi dito, os problemas formulados pelos quatro participantes neste estudo foram feitos em cinco entrevistas.

Numa delas, a designada "Entrevista Livre", subdividida em três momentos, os alunos tiveram a oportunidade de formular um problema que não tinha qualquer restrição à partida a não ser o pedido que formulassem um problema de que gostassem. Esta entrevista não serviu apenas esse objetivo, mas também obter dados referentes às características pessoais dos participantes, a suas preferências, gostos, opiniões sobre resolução e formulação de problemas, etc,…

Em cada uma de outras duas entrevistas, designadas "30×25" e "3×6=18", os alunos formularam problemas a partir de uma expressão de cálculo que lhes era apresentada. Este tipo de tarefa de formulação de problemas está associada ao que Christou et al. (2005) designaram por processo cognitivo *Compreender*. Neste tipo de tarefas o que se pretendeu observar e recolher como resultados foi a capacidade de formular um contexto multiplicativo, enquadrando-o nos sentidos dos contextos definidos por Greer (1992) e/ou nas tríades semânticas de Schwartz (1988).

Restam a 4.ª e 5.ª entrevistas, designadas "Caixas de Pastéis" e "Caixas de Gelados", nas quais os alunos tiveram de formular perguntas a partir de contextos fornecidos. Na classificação do tipo de tarefas proposta por Christou et al. (2005) correspondem a categorias diferentes: a) na primeira era dado o contexto e pedia-se uma pergunta que se resolvesse por uma multiplicação, ou seja, a formulação da pergunta estava condicionada a uma determinada representação, enquadrando-se esta tarefa na categoria das que estão associadas ao processo cognitivo *Traduzir*; b) na segunda foi pedido a formulação de perguntas sem outra restrição senão a de que deveriam conter dados fornecidos pelo contexto, enquadrando-se assim na categoria das que estão associadas ao processo *Editar*. Nestas duas tarefas o objetivo era ver qual e como era mobilizado o conhecimento matemático na formulação das perguntas. Para isso recorreu-se aos processos enunciados por Vergnaud (1983, 1988) na análise do campo concetual das estruturas multiplicativas.

Os resultados globais serão apresentados de forma sintética em cinco tabelas, correspondendo cada uma aos problemas formulados, alinhando os dados dos quatro participantes. Esta forma de apresentar os resultados de forma sintética em tabela permite relacionar e compreender alguns resultados, tanto pelo que têm de comum como pelo que têm de diferente. Esta síntese pode, no entanto, "cortar" aspetos que terão de ficar mais claros na descrição do conteúdo das tabelas.

9.1. Os problemas de formulação "Livre"

A Tabela 20 (pág. 202) contém os dados dos problemas de formulação "Livre" e algumas das idiossincrasias dos alunos que são importantes por estarem relacionadas e poderem contribuir de para as respostas às questões do estudo. A tabela tem oito colunas: 1.ª com o nome dos alunos, 2.ª com as operações envolvidas no problema formulado, 3.ª com os sentidos dos contextos dos problemas formulados (os aditivos segundo Vergnaud, e os multiplicativos segundo Greer), 4.ª com os referentes dos dados numéricos fornecidos nos problemas (segundo Schwartz), 5.ª com a explicitação feita pelo aluno do processo de formulação do problema, que está relacionado com a 6.ª coluna onde expressam o interesse pessoal pelo problema, a 7.ª com o nível de desempenho escolar em que se situam e, por fim a 8.ª com os seus gostos ou preferências por temas ou tópicos de conteúdos curriculares.

Na Tabela 20 (na pág. 202) pode-se observar que entre os problemas formulados livremente pelos participantes há aspetos que os ligam e aspetos em que os distinguem. O que têm em comum é o facto de estarem todos dentro do tema dos números e operações e envolverem apenas números inteiros referentes a grandezas discretas; não há problemas envolvendo medida. Na tabela não está explícito, mas subentende-se e é verdade que o tema da Medida enquanto conteúdo matemático não foi considerado como preferência entre os gostos manifestados pelos participantes. O que é comum a todos os problemas fica por aí: tema matemático dos Números e operações, envolvendo números inteiros referentes a grandezas discretas.

É possível também observar-se aspetos comuns entre os resultados da Isabel e Ricardo que são distintos dos resultados comuns entre o Daniel e Madalena.

Algo que é comum aos que foram formulados pela Isabel e pelo Ricardo é a pertença a situações de estrutura aditiva. Enquadram-se ambos numa categoria que Vergnaud (1990) designa por transformação de um estado inicial para um estado final. No currículo atualmente em vigor são situações designadas por acrescentar para a adição e retirar para a subtração. Olhando agora para as características destes dois alunos podemos observar também aspetos comuns. Ambos formularam o problema por envolverem operações de que gostava. Embora o Ricardo tenha afirmado que pensou no problema em função da resolução por cálculo mental, e a Isabel porque tinha a certeza que resolvia bem, parece poder afirmar-se que ambos pretendiam formular um problema com resolução assegurada. Outro aspeto comum é o nível de desempenho escolar. E por fim há pontos comuns e diferentes nas suas preferências temáticas. Ambos preferem a OTD entre os temas matemáticos, e dizem que preferem antes resolver problemas que formular. Mas depois distinguem-se. A Isabel prefere o Português à Matemática e o Ricardo a Matemática ao Português, justificando-se pelas dificuldades que tem a Português. Ambos preferem a resolução de problemas em detrimento da formulação, embora a Isabel tenha afirmado que gostaria se fosse uma formulação livre. O Ricardo acha que a formulação de problemas não interessa no que respeita ao trabalho que tem de fazer e aprender na Matemática escolar.

Tabela 20: Resultados relativos aos problemas de formulação Livre em correspondência com idiossincrasias dos alunos.

Alunos	Operação presente no problema "Livre"	Sentido do contexto formulado *(Vergnaud, 1990) **(Greer, 1992)	Referentes das quantidades dadas no contexto (Schwartz, 1988)	Processo de formulação (entrevista "Livre")	Interesse do problema (entrevista "Livre")	Opinião sobre o desempenho escolar (entrevista "Livre")	Gosto manifestado por temas escolares (entrevista "Livre")
Isabel	Adição e subtração. 103+375−50	Transformação quantificada de um estado inicial para um estado final.*	Brinquedos: [QED].	Formular um problema que resolve bem.	Gosto pelas operações envolvidas.	Situa-se a um nível médio, mas é situada pelos colegas em um nível inferior.	Pref. LP à MAT; as contas à RP; a OTD aos outros temas. Não gosta das divisões. Pref. RP à FP.
Ricardo	Adição. 28+2005	Transformação quantificada de um estado inicial para um estado final.*	Carrinhos: [QED] (os n.os escolhidos são do seu aniversário)	Formular um problema que resolve mentalmente.	Gosto pelos dados (numéricos) pessoais e pela operação pref.	Situa-se a um nível médio, mas é situado pelos colegas em um nível inferior	Pref. MAT a LP pelas dificuldades sentidas. Pref. OTD, Ad. Mul. e CM. A FP é secundária em relação à RP.
Daniel	T=*nx*+*x* Divisão T÷(*n*+1)=*x* Multiplicação n×x	Comparação multiplicativa, Partilha equitativa**	Alunos por ano ou por turma: [QID] Turmas/Salas [QED]	Complexificar um problema recordado (produz um enunciado incorreto)	Gosto por problemas com maior n.º de cálculos	Situa-se a um nível superior em concordância com os colegas	Pref. MAT; NO, RP difíceis, de raciocínio e com muitos Cc. Gosto pela FP.
Madalena	Divisão (inversa da multiplicação). $\{D_{96}\}$	Agrupamento/medida (Grupos iguais)**	Convidados $\{D_{96}\}$ [QED] Fatias de bolo por convidado [QID]	Exemplificar um problema que não tem uma resposta única (produz um enunciado incorreto)	Gosto por problemas com mais do que uma resposta.	Situa-se a um nível superior em concordância com os colegas	Pref. MAT à LP Pref. NO, RP, Cc,Alg, Tab. Pref. RP à FP.

Abreviaturas e Siglas: **Ad**: adição. **Mul**: multiplicação. **Cc**: cálculo. **CM**: Cálculo mental. **Alg**: algoritmo. **Tab**: tabela. **Pref**: preferência/preferida. **NO**: números e operações**. OTD**: organização e tratamento de dados. **MAT**: matemática. **LP**: língua portuguesa. **RP**: resolução de problemas. **FP**: formulação de problemas. **QED**: quantidade extensiva discreta. **QID**: quantidade intensiva discreta.

Os problemas formulados pela Madalena e pelo Daniel também têm em comum serem situações de estrutura multiplicativa, mas com diferenças que dizem respeito às operações que os resolvem e à própria representação da situação. Têm também em comum o facto dos enunciados formulados conterem incorreções que não permitiam alcançar o objetivo proposto. Ou seja, a formulação do problema foi feita tendo em conta um processo de resolução, mas as condições estabelecidas no enunciado não permitiam aplicar tal processo. O Daniel pretendia formular um problema mais complexo do que este: saber o número de pessoas pertencentes a cada um de dois grupos distintos, sabendo o total de pessoas e o número de vezes que relacionava o número de pessoas de cada grupo. A Madalena pretendia formular um problema cujo objetivo era saber o número de pessoas que seria possível reunir para consumir integralmente 96 fatias de bolo distribuídas equitativamente, sem que fossem fracionadas. O processo de formulação tanto o Daniel como a Madalena era formular um problema mais complexo do que aquele que conheciam. A dificuldade que a Madalena pretendia introduzir era aumentar número de divisores para que fossem encontradas mais respostas possíveis, e o Daniel pretendia aumentar o número de cálculos necessários para resolver o problema. No fundo o interesse básico comum aos dois era aumentar o número de cálculos. Que características pessoais tinham estes alunos em comum? O alto nível de desempenho escolar reconhecido tanto por eles como pelos colegas, um grande interesse pela Matemática e pela resolução de problemas, com pequenas diferenças: Daniel prefere problemas difíceis, que exigem raciocínio e muitos cálculos; a Madalena exprime as suas preferências tendo por base a qualidade das representações e processos de resolução, nomeadamente os algoritmos e as tabelas, sejam tabelas de razão ou outras, por exemplo, a que mostrou para encontrar os divisores de 96. Relativamente à formulação de problemas há diferenças: a Madalena disse que preferia a resolução, a não ser que a deixassem formular problemas livremente; o Daniel exprimiu o gosto pelo desafio da formulação de problemas, e emitiu opinião sobre duas formas de inventar problemas: inventar problemas sabendo de antemão a resposta e, por oposição, inventar problemas cuja resposta ainda não se sabe.

De um ponto de vista global, em relação a estes resultados referentes à formulação livre de problemas, não deixa de ter algum significado o facto dos dois alunos com melhor performance escolar terem “arriscado” a formulação de problemas mais difíceis, acabando por não conseguir obter um enunciado “perfeito”. Não se quer com esta observação chamar a atenção para o que não conseguiram mas para o seu objetivo e a sua capacidade. O domínio do conhecimento sobre múltiplos e divisores promoveu a complexificação pretendida pela Madalena – aumentar o número de divisores e, portanto, o número de respostas ao problema. O apelo que o Daniel sente pelo desafio levou-o à exploração de uma estrutura matemática complexa.

Do mesmo modo se pode relacionar o caráter elementar dos problemas formulados pelos dois alunos com um menor nível de sucesso escolar com o seu gosto por problemas que sabem resolver bem (afirmação da Isabel), com operações que dominam ou, como deu a entender o Ricardo, problemas onde pode aplicar as suas estratégias de cálculo mental, ou com números de que gostam por alguma razão e com referentes que lhes interessam.

9.2. Os problemas formulados a partir de expressões numéricas

Nas tarefas “30×25” e “3×6=18” era pedido ao aluno que inventasse o contexto em que a expressão numérica servisse como resolução do problema criado. Pretende-se apresentar e discutir em conjunto os resultados obtidos nestas duas tarefas.

Na Tabela 21 (pág. 205) sintetizam-se os resultados relativos aos problemas formulados pelos quatro participantes para a expressão 30×25 na entrevista realizada a 16 de maio de 2014, 3.º período do 3.º ano. A tabela tem uma primeira coluna para o nome dos alunos, na segunda coluna estão os dados presentes no enunciado formulado pelos alunos, na terceira estão indicados os sentidos dos contextos de acordo com a classificação de Greer (1992), e na última coluna são dadas informações relativas ao processo de formulação. Não se considerou essencial a forma de resolução, a não ser que isso constitua uma particularidade significativa referente às capacidades do aluno e à sua forma de lidar com a formulação do problema.

Na Tabela 22 (na pág. 206) estão sintetizados os resultados relativos aos problemas formulados pelos quatro participantes para as expressões 3×6=?, ?×6=18, e 3×?=18 na entrevista feita a 2 de dezembro de 2014, isto é, no 1.º período do 4.º ano de escolaridade. Embora esta tabela tenha uma organização diferente da mencionada acima, ela contém o mesmo tipo de informação: os dados presentes nos enunciados, apresentados de um modo que permita uma comparação fácil, os sentidos dos contextos inventados pelos alunos e comentários relativos ao processo de formulação.

O interesse pela invenção de um contexto para uma dada expressão numérica está na possibilidade de lhe dar significado, mais especificamente, dar um significado à operação que está presente na expressão. O significado da operação, ou o seu conceito, não se limita à definição matemática da operação, mas assume diferentes sentidos em função das situações onde ela serve de modelo, tal como já foi suficientemente referido pela literatura sobre educação matemática. Faz parte das competências matemáticas mínimas de um indivíduo saber decidir a operação que resolve uma dada situação e o modo de a solucionar. É isto que se pede aos alunos na resolução de problemas de cálculo. Seguir o processo inverso, isto é, saber que contextos são resolvidos por uma expressão de cálculo pode ser uma forma de aprender o que tradicionalmente se pretende com a resolução de problemas.

Tabela 21:Resultados relativos aos problemas formulados pelos quatro participantes para a expressão 30×25 (16 de maio de 2014).

Alunos	Dados do enunciado	Sentido do contexto	Formulação
Isabel	Balões da J.→ 25 Balões do A.→<u>30×</u> (25 Balões da J.) └ [escalar] ? Total de balões (J.+A.)	Comparação multiplicativa [Mult por um escalar] Dá por concluída a resolução depois de fazer o algoritmo para 30×25.	Com base num problema de que (acha) se lembra de ter formulado. Em outubro (4.º ano), recorda a formulação de um problema que fez para 806×84, o qual possuía um contexto de multiplicação por um escalar, e onde a pergunta exigia a adição do produto ao multiplicando.
Ricardo	Como calcular 30×25? [1.º usou uma estratégia de cálculo, 2.º um algoritmo com 30 no multiplicador, 3.º um algoritmo com 25 no multiplicador]	—	Evita a invenção de um contexto que dê sentido à operação. Justificou-se por não gostar de inventar histórias.
Daniel	1 prateleira → 25 livros 30 prateleiras → ? livros	Grupos iguais	Recorre à memória de ter formulado em aula a partir da expressão 3×4.
Madalena	1 amigo → 30 palhaços 25 amigos → ? palhaços	Grupos iguais	Com base no conhecimento de problemas que considera elementares de anos anteriores. Aponta para a irrealidade do contexto que inventou.

Tabela 22: Resultados relativos aos problemas formulados pelos quatro participantes para as expressões 3×6=?, ?×6=18, e 3×?=18 (2 de dezembro de 2014)

<table>
<tr><th>Alunos</th><th>3×6=?</th><th>?×6=18</th><th>3×?=18</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Isabel</td><td>Fez previamente três tentativas goradas para a formulação deste problema:
6 cad + 6 cad + 6 cad = ? cad
Grupos iguais (adição iterada)</td><td>Faz duas tentativas que reconhece não serem válidas e desiste.</td><td>Tenta formular a partir de um problema discutido anteriormente na entrevista
M→ 3 livros. I→ 3× (3 livros de M.)
O total (M + I) são 18 livros. ? livros de I</td></tr>
<tr><td colspan="3">Com exceção da situação criada para a expressão 3×6=?, recorreu “sempre” (em “30×25” e noutra situação que recorda (806×84) a contextos de Comparação multiplicativa. Na última entrevista diz que não gosta de inventar para expressões de multiplicação, recordando explicitamente esta tarefa (“3×6=18”).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ricardo</td><td>1 amigo → 6 carros
3 amigos → ? carros
Grupos iguais</td><td>1 amigo → 6 carros
? amigos → 18 carros
Divisão por medida ou agrupamento</td><td>1 amigo → ? carros
3 amigos → 18 carros
Divisão por partilha equitativa</td></tr>
<tr><td colspan="3">Considerou que os problemas são óbvios, com cálculos simples. Verifica-se uma monotonia nos contextos que inventava (usa os mesmos referentes), mas neste caso, a manutenção dos referentes conduziu à formulação de dois contextos com sentidos diferentes para a divisão: Medida e Partilha equitativa.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Daniel</td><td>Balões do Pedro → 6
Balões do amigo ? → (3×6)
Mult. por um escalar: Comparação multip.</td><td>1 pessoa → ? chocolates
6 pessoas → 18 chocolates
Divisão por partilha equitativa</td><td>1 amigo → ? balões
3 amigos → 18 balões
Divisão por partilha equitativa</td></tr>
<tr><td colspan="3">Considerou muito fáceis os problemas que inventou em virtude da ordem de grandeza e das relações de dobro e triplo dos números.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Madalena</td><td>1 filho → 6 euros
3 filhos → ? euros
Medidas iguais</td><td>1 filho → ? fatias
6 filhos → 18 fatias
Divisão por partilha equitativa. Grupos iguais</td><td>1 amigo → ? euros
3 amigos → 18 euros
Divisão por partilha equitativa. Medidas iguais.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Referência a problemas elementares e à simplicidade das operações. Comenta que, com números maiores, era mais difícil inventar um problema por ser mais difícil encontrar um contexto adequado [realista].</td></tr>
</table>

A primeira questão levantada pelos participantes na realização destas tarefas de formulação de problemas foi a falta de imaginação e o gostar ou não de inventar problemas. Esta questão não foi posta nas outras tarefas, a não ser no que diz respeito à preferência por inventar livremente, sem condicionalismos, o que pode ser uma reação à dificuldade de inventar um contexto. A dificuldade de inventar um contexto foi assumida claramente pelo Ricardo, que evitou a formulação de uma história na primeira tarefa ("30×25"), e resistiu na segunda ("3×6=18"), fazendo referência à falta de gosto pela invenção de histórias. A Madalena também foi explícita ao mencionar a resistência à invenção de histórias, principalmente quando essa tarefa consistia uma obrigação. Estas objeções podem sugerir uma dificuldade ou a presença de um obstáculo inicial associado à dita "falta de imaginação" que, nestes alunos se manifestou explicitamente (com exceção explícita do Daniel que afirmou exatamente o gosto pela invenção). Ou seja, a dificuldade que é preciso ultrapassar tem a ver com uma opinião sobre as próprias capacidades.

Outro aspeto ligado à dificuldade de invenção de contextos prende-se com a capacidade de encontrar referentes adequados à ordem de grandeza dos números presentes na expressão e ao realismo da situação. Foi a Madalena que mencionou este aspeto. Diz que se os números forem maiores também maior será a dificuldade em encontrar referentes adequados. Antes de inventar o problema para a expressão 30×25 pergunta se pode inventar um contexto que não faria sentido na vida real. De facto, reconhecendo a irrealidade do que inventa, escolhe para o contexto a situação de uma festa de aniversário em que 25 convidados oferecem ao aniversariante 30 palhaços cada um.

Os dois parágrafos anteriores apontam para dois possíveis obstáculos a ultrapassar quando se deseja formular um problema a partir de uma expressão numérica: o gosto pela invenção de histórias e a procura de realismo para o contexto. O terceiro "obstáculo" é do domínio do conhecimento matemático, começando pelo reconhecimento de um objeto, a expressão numérica, representado num sistema de símbolos, cujo significado exige a mobilização dos esquemas que envolvem os necessários invariantes operatórios que não são independentes das situações a que os esquemas estão associados[39]. Ou seja, a tarefa que é pedida ao aluno não é simples. Inventar um problema para ser resolvido por uma dada expressão numérica não é só uma questão de imaginação, mas de conhecimento matemático. O exemplo mais abstrato do que significa dar significado à operação multiplicação é, por exemplo, dizer que "$a \times b$ é igual à soma de b tantas vezes quanto a. O que está em causa é mostrar como se entende a operação.

O Ricardo, na formulação do problema a partir da expressão 30×25 não o fez como convencionalmente se esperava, mas fê-lo na tarefa "3×6=18", apesar de se dizer pouco à vontade

[39] Faz sentido voltar a olhar para o diagrama que Vergnaud (1998) sobre a representação (Figura 2, pág. 27).

na invenção de histórias. Foi capaz de associar à representação da operação um contexto que lhe dava sentido. Já a Isabel, tanto na tarefa “30×25” como em “3×6=18”, mostrou dificuldades. Ainda que tenha confessado pouca imaginação verificou-se que não foi propriamente essa a dificuldade mas sim o entendimento da operação de multiplicação e como este entendimento estava ainda tão próximo do raciocínio aditivo.

A melhor aproximação da formulação de um contexto multiplicativo pela Isabel foi “sempre” a multiplicação por um escalar, embora, depois, acabasse por inquirir de forma a ser necessário reunir multiplicando e produto.

O Daniel e Madalena consideraram fácil a atribuição de um contexto às expressões numéricas. Esta facilidade, de acordo com estes alunos, está relacionada com a simplicidade das expressões numéricas (na tarefa “3×6=18”), a qual se traduzia pelo baixo valor dos números envolvidos. O Daniel, para a formulação de um problema para a expressão 30×25 diz que se inspirou num problema que inventou na sala de aula para a expressão 3×4. A Madalena diz que, com aquelas expressões numéricas, só lhe ocorriam os problemas do primeiro ano. Com isto não quer dizer que se recorda de um problema específico, mas de uma generalidade de problemas, isto é, parece estar a referir-se a uma representação do conjunto de situações que podem dar significado às expressões.

Os problemas criados pelo Daniel e pela Madalena para a expressão 30×25 incidiam em contextos de Grupos iguais. Aliás, a maioria dos contextos formulados pertencem à categoria Grupos iguais. As exceções são: a) o problema formulado pelo Daniel para a expressão 3×6=?, que se enquadra na Comparação multiplicativa, b) os problemas formulados pela Madalena para as expressões 3×6=?, e 3×?=18, que, por envolverem uma grandeza contínua, dinheiro, podem ser enquadrados em Medidas iguais. Na verdade, o que é significativo é serem realmente os únicos a envolverem uma grandeza contínua, que até é bastante comum nos problemas presentes nos manuais. Se tivermos em conta a classificação de Schwartz (1988), todos os problemas estão dentro da tríade IEE’. Esta homogeneidade tem naturalmente a ver com o facto dos números envolvidos nas expressões serem números inteiros.

As respostas dos alunos às perguntas do investigador sobre o modo de pensar na formulação dos problemas remetem em geral para a memória. Uns para memórias que associam a situações concretas ou, como diz a Madalena, para uma generalidade de situações.

9.3. Os problemas formulados a partir de contextos

Há uma diferença significativa entre as duas tarefas que pedem a formulação de perguntas a partir dos dados de um contexto. Na primeira é pedida apenas uma pergunta de multiplicação enquanto na segunda se pedem várias perguntas e a quantidade de dados e condições presentes no enunciado é maior, o que permite ao aluno a formulação de uma maior diversidade de perguntas e ao investigador discernir em que dados ou relações se basearam as perguntas. Só a última conduzia ao envolvimento da medida e, fornecia um dado numérico não inteiro.

Foi possível perceber que não é só o conhecimento matemático que entra em ação na formulação das perguntas, mas também o conhecimento do contexto. Além disso observou-se que de um modo geral a pergunta correspondia a uma descoberta, a pergunta parecia nascer de algo que se descobria. Isto é bastante claro, principalmente nos resultados obtidos do Daniel quando inventou as perguntas, tanto nas tarefas “Caixas de Gelados” como em “Caixas de Pastéis”, dada a espontaneidade com que exprimia em voz alta o que pensava enquanto resolvia a tarefa. Com os outros alunos, de um modo geral, quando não era explicitada a origem da pergunta, podia perceber-se pela maneira como a resolviam, ou seja, pelos dados que relacionavam para resolver a questão. Um exemplo disto pode ser observado na pergunta sobre o custo de uma caixa na tarefa “Caixas de Gelados”. O Daniel e a Madalena escreveram-na da mesma maneira, “Quanto custou cada caixa?”, mas não significava o mesmo, pois a Madalena pretendia dividir o custo total por 6 caixas enquanto o Daniel o faria por 4. A diferença em termos de processo, ou da origem da pergunta, está exatamente no que cada um observou relativamente aos dados e condições do enunciado.

A Tabela 23 (na pág. 211) descreve os principais pontos dos resultados da realização da tarefa “Caixas de Pastéis” pelos quatro participantes. Numa coluna descreve-se o objetivo da pergunta e na coluna seguinte descreve-se o processo. Por economia de espaço e facilidade de visualização do conjunto não se mostrou a tarefa. Será suficiente mostrar aqui os dados numéricos fornecidos na tabela presente no enunciado:

Número de caixas:	...	*4*	*8*	*16*	...
Número de pastéis embalados:	...	*16*	*32*	*64*	...

Na resolução da tarefa “Caixas de Pastéis”. Tanto o Daniel como a Madalena e o Ricardo fizeram a mesma pergunta, o número de pastéis embalados em 32 caixas. Os três escolheram o número 32 para figurar na pergunta mas a resolução que anteciparam não foi a mesma.

O Daniel começou por explicitar a relação funcional, 4 pastéis por caixa, identificando essa relação como uma constante entre o número de caixas e de pastéis embalados. A resolução foi feita com base nessa relação e, apesar de ter selecionado o número 32, que é o dobro de 16, demorou a reconhecer que podia chegar ao resultado pela relação escalar.

A Madalena, logo no início, interrompeu a leitura do enunciado para exprimir com uma entoação de enfado, quanto já reconhecia aquele tipo de contexto, que tal contexto aparecia frequentemente e que, invariavelmente, se lhe seguia um certo tipo de pergunta resolvida por uma divisão. Interessa referir isto para frisar, mais uma vez, que já aconteceu nas outras tarefas: ela mostrou "sempre" um conhecimento da tipologia das situações, não apenas a memória de um ou outro problema. Quanto à resolução da tarefa, também identificou o número de pastéis por caixa, mas não usa essa informação para calcular o número de pastéis em 32 caixas, ou seja, não usa a relação funcional. Em relação ao Daniel há uma diferença significativa, pois que para o Daniel é claro que 4 pastéis por caixa é uma constante, mas para a Madalena não há evidência de que, naquele momento, ela tivesse plena consciência disso, antes mostrou claramente que usou e domina a relação escalar.

O Ricardo não procura saber o número de pastéis em uma caixa, antes identifica e usa a relação escalar. Por fim, a Isabel que, diferentemente dos seus colegas, pergunta o número de pastéis em 22 caixas em vez de escolher o número 32. Se se tivesse ficado apenas pela formulação das perguntas, se não se soubesse de onde elas surgiram, do que levou à sua formulação e que resoluções foram pensadas pelos formuladores, ter-se-ia considerado que a pergunta da Isabel era a mais desafiante exatamente porque a resolução não era facilitada pela relação escalar que o enunciado oferecia. Neste caso, a pergunta mais desafiante foi formulada por quem revelou um menor domínio do conhecimento envolvido no contexto.

Com a Isabel manifestou-se também uma particularidade que interessa relevar. Assim que acaba de ler o enunciado da tarefa questionou se devia formular primeiro a pergunta ou resolver primeiro. "Resolver primeiro" significava continuar a regularidade que observava na tabela presente no enunciado, pois na verdade o enunciado não continha nenhuma pergunta que exigisse resolução. Mais uma vez se indicia que a leitura dos dados fornecidos no contexto são colocados em relação antecipando operações que respondem a possíveis perguntas. Isto sugere então que as perguntas são então o resultado do que se descobre. E esta descoberta tem a ver com os conceitos-em-ação e os teoremas-em-ação que, pela sua própria natureza têm pertinência ou validade consoante a experiência do sujeito, consoantes os esquemas e as situações já experienciadas. Ou seja são descobertas que podem corresponder a esquemas não completamente adequados à resolução correta da situação. Foi o que aconteceu com a Isabel ao interpretar a progressão dos dados numéricos fornecidos na tabela.

A Isabel mostrou estas fragilidades na tarefa "Caixas de Pastéis" que realizou a 9 de outubro, no início do 1.º período do 4.º ano, mas na tarefa "Caixas de Gelados", última a ser aplicada, a 6 de janeiro, faz uma pergunta que envolve uma multiplicação e usa corretamente a relação escalar para a resolver. Os resultados obtidos dos quatro participantes relativos à tarefa "Caixas de Gelados" estão na Tabela 24 (na pág. 212).

Tabela 23: Resultados relativos às perguntas formuladas pelos quatro participantes na tarefa "Caixas de Pastéis", realizada na entrevista de 9 de outubro de 2014

Alunos	Incidência da pergunta	Processo de formulação
Isabel	N.º de pastéis em 22 (21) caixas	A sua pergunta baseia-se na interpretação de que o n.º de caixas progride de 4 em 4 e que o n.º de pastéis de 6 em 6. Incide a pergunta sobre o número de pastéis em 22 caixas por adição de 6 a 16 caixas Não relaciona multiplicativamente a progressão dos dados numéricos, não sendo capaz de usar o fator escalar. Também não identifica a relação funcional – 4 pastéis por caixa – que seria mais fácil usar do que as propriedades do isomorfismo, dado o número que escolheu.
Ricardo	N.º de pastéis em 32 caixas Resolve duplicando mentalmente 64 pastéis	A dúvida manifestada inicialmente na interpretação da tabela é ultrapassada facilmente. Explicita em linguagem aditiva a progressão dos dados numéricos, mas a interpretação é multiplicativa, identificando a relação escalar. Faz incidir a pergunta sobre o n.º de pastéis em 32 caixas porque é 16 +16 e o número de pastéis será 64+64. A pergunta surge depois desta explicitação da relação escalar.
Daniel	N.º de pastéis em 32 caixas Usa a propriedade distributiva da multiplicação no cálculo de 4×32: 4×30=120; 4×2=8; 4×32=128.	Começou por explicitar a relação funcional entre o número de caixas e de pastéis, mostrando que ela se mantinha em todos os valores presentes na tabela. Afirmou a relação funcional para justificar a pergunta que incide sobre o número de pastéis em 32 caixas e determina a resposta multiplicando 4×32. Embora tenha escolhido 32 para a pergunta não reconhece que poderia ter usado a relação escalar para determinar a resposta.
Madalena	N.º de pastéis em 32 caixas Recorre à relação escalar. Regista “64×2=”, acha o resultado (128) com o algoritmo.	Começa por comentar a primeira pergunta que lhe “vem à cabeça” – o n.º de pastéis por caixa –, enfatizando a frequência com que aparece nos problemas, e exemplifica. Formula a pergunta sobre o número de pastéis em 32 caixas justificando por ser o dobro de 16 caixas e por ser par, característica que, na sua opinião, facilita os cálculos. Usa a relação escalar para encontrar a resposta.

Tabela 24: Resultados da formulação das perguntas na tarefa "Caixas de Gelados" pelos quatro participantes, realizada na entrevista de 6 janeiro de 2015.

Alunos	Perguntas enunciadas	Formulação	Resolução
Isabel	"Se ele levasse 12 caixas do supermercado, a) quanto gastaria, b) quantos gelados levaria?"	Começou por dizer que não sabia muito bem como pensou nas perguntas. Concluiu que pensou no que levaria se fosse às compras e que pensou nas *contas* que teria de fazer.	a) 2×7,20=14,40 →Recorrendo ao fator escalar. b) 2×24=48 →Idem, tal como fez ao custo das 12 caixas. Esteve tentada a usar a relação funcional.
Ricardo	a) "Quanto dinheiro custava um gelado?" b) "Quanto dinheiro custava a caixa dos seis gelados?" c) "Se não houvesse a promoção de levar três caixas e pagar duas quanto dinheiro custava [uma caixa]?"	Formulou as perguntas por antecipação das operações que deviam ser efetuadas. Por exemplo… A pergunta b) depende da resposta à primeira (a) Na pergunta c) é evidente que esteve ciente da promoção logo de início, e revela depois que tem uma resolução em mente.	a) Divisão: 7,20÷24 (algoritmo). b) Multiplica por 6 o custo de um gelado determinado na 1ª pergunta. c) De início mostra saber que só foram pagas 4 caixas, mas depois hesita.
Daniel	 a) "Quantos gelados tem cada caixa?" b) "Quanto custa[ria] cada caixa [se não houvesse a promoção]?"	Começou por explicitar a condição promocional, afirmando o n.º de caixas efetivamente pagas usando a relação escalar. As perguntas nasceram da antecipação da resolução.	Relação escalar: dobro: se em 3 paga duas, em 6, dobro de 3, paga o dobro de duas, 4. Cálculo mental: 24÷6 Algoritmo: 7,20÷4
Madalena	a) "Quanto custou cada caixa?" b) "Quantos gelados tinha cada caixa?" c) "Quanto custou cada gelado?"	Iniciou a formulação das perguntas assim que acabou de ler o enunciado, sem expressar qualquer comentário. Formulou as perguntas antecipando a resolução ou possível resolução.	a) Cálculo mental: 7,20 ÷ 6 = 1,2 b) Cálculo mental: 24÷6=4 c) Algoritmo: 7,20÷24=0,30

Todos os alunos, os participantes neste estudo e os colegas de turma, iniciaram o estudo da multiplicação através da resolução de problemas envolvendo números com mais de um dígito, usando procedimentos escalares para resolver os cálculos necessários. O esquema apresentado por Vergnaud (1997) para a multiplicação na classe do isomorfismo de medidas era usado na turma através das tabelas de razão, dispostas em geral na horizontal. Outros processos eram também usados, relacionados com estratégias de cálculo mental. Um indício disso é o recurso que o Daniel fez da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para resolver 4×32.

O enunciado da tarefa "Caixas de Pastéis" apresentava os dados numa tabela com relações fáceis de reconhecer. No entanto os participantes neste estudo manifestaram entendimentos diferentes do conhecimento necessário para lidar com este esquema. A Isabel mostra que sabe que há uma covariação entre as duas grandezas, número de caixas e número de pastéis, mas procura-a em relações aditivas e não multiplicativas. Ela manifesta um conhecimento rudimentar, mas que é suficiente para formular uma pergunta que faz sentido. Os seus colegas também não mostram um domínio completo do esquema pois tanto a Madalena como o Ricardo descrevem as relações aditivamente, embora operem multiplicativamente. O Daniel, pelo contrário, nunca se refere às relações escalares, embora isso não signifique necessariamente que não as sabia usar. Vergnaud sublinha em vários textos como é longo o processo que conduz ao domínio dos conhecimentos tanto das estruturas multiplicativa como aditivas.

A Tabela 24 (na pág. 212) mostra os resultados obtidos pelos quatro participantes na realização da última tarefa, "Caixas de Gelados". Três colunas principais, a primeira com as perguntas formuladas (as perguntas espontâneas, as primeiras formuladas), a segunda coluna com as principais notas relativas ao processo de formulação e, a terceira com as resoluções apresentadas pelos alunos.

O Ricardo e o Daniel quiseram saber o custo de uma caixa de gelados sem ter em atenção a condição promocional, mas o Ricardo foi o único a exprimir explicitamente a condição no texto da sua pergunta. A Isabel e a Madalena só após provocação do investigador consideraram esse dado. Portanto, o conhecimento do contexto parece ter também um papel significativo na formulação das perguntas neste tipo de tarefas e, considerando os resultados obtidos nas tarefas em que a formulação se baseia numa expressão numérica, verifica-se que o conhecimento do contexto tem importância e não pode ser desligado do conhecimento matemático.

Na tarefa "Caixas de Gelados", como reação a uma provocação do investigador, a Madalena acrescenta duas perguntas às primeiras três que formulou espontaneamente. Quando se dispõe a iniciar a resolução da primeira desse par, confronta-se com a dificuldade em encontrar um processo de resolução e acaba por reconhecer que não pensou na resolução, que sabe que dá para resolver mas que não está a ver como, e só vê saída para a dificuldade quando percebe que lhe dá jeito responder à outra pergunta primeiro. A tarefa "Caixas de Gelados" proporcionou a formulação deste tipo de perguntas não só à Madalena. São perguntas que parecem ter resolução possível mas que não se encontra imediatamente disponível. Portanto, o que está na base da formulação da pergunta não é apenas o que efetivamente se sabe, mas o que se supõe conseguir alcançar em função também do contexto.

O conhecimento matemático é o que permite a identificação de relações matemáticas no contexto e que sugerem uma pergunta. O conhecimento do contexto fornece outras pistas que não foi possível escrutinar neste estudo.

9.4. Conclusões

Do que se disse até aqui, ficou claro que formular uma pergunta se baseia numa descoberta e que esta descoberta é tão mais fácil de fazer quanto maior é o conhecimento matemático, embora esta relação não pareça ser linear.

A importância da experiência vivida na resolução de problemas e a facilidade em invocar de memória problemas parecidos parecem ter um papel muito importante no processo de formulação de problemas partindo de expressões numéricas. É necessário salvaguardar que esta afirmação resulta da análise de tarefas de formulação com expressões envolvendo apenas uma operação. Pode haver outras componentes do processo em tarefas que envolvam mais do que uma operação.

Na formulação de problemas em que não foi dada restrição mostrou-se importante a memória, o interesse pela formulação de problemas e o conhecimento matemático.

O Ricardo e a Isabel optaram por formular problemas porque gostavam das operações ou dos números incluídos, sem mostrar grande interesse pela formulação de problemas. A propósito dos problemas de que gostava, a Isabel disse gostar dos que resolvia bem e sobre a invenção de problemas disse que preferia inventar livremente porque assim formulava os que saberia resolver. O Ricardo achava que o importante era saber resolver problemas e não inventá-los, e preferia inventar a partir de dados fornecidos. Para o problema que inventou escolheu números referentes ao seu aniversário e a operação de que gostava.

Para a Madalena e o Daniel tanto o interesse como a memória e o conhecimento matemático tiveram um papel decisivo na formulação. O Daniel foi o que explicitou um interesse incondicional pela formulação de problemas, dizendo que gostava de inventar em qualquer das situações, tanto a partir de operações como de contextos ou livremente. A Madalena foi mais contida a exprimir o seu interesse, balizando-o atendendo à sua liberdade pessoal e assim, a inventar, preferia fazê-lo sem as restrições que as tarefas impunham. Quanto à memória, ambos fizeram uso dela no processo de formulação. Tanto um como o outro basearam o enunciado do seu problema noutro que tinham resolvido em aula, mas nenhum fez uma reprodução, ambos introduziram modificações em função do seu interesse. A Madalena justificou a escolha invocando o género de problema de que gostava de resolver, um que não se resolvesse com uma operação, mas que fosse necessário explorar hipóteses. O Daniel escolheu recordar um tipo de problema que tinha tido dificuldade em resolver e cuja resolução o tinha deixado curioso. A modificação que introduziram no enunciado que inventaram foi feita para complexificar a resolução, o que mostra o papel que o conhecimento matemático teve no processo de formulação. Recordaram um problema já resolvido e quiseram torná-lo diferente no sentido de o aproximar das suas preferências, que no caso da Madalena era aumentar o número de hipóteses que respondiam ao problema e, no caso do Daniel era aumentar o número de operações necessárias para o resolver.

O problema que o Daniel formulou sem restrições de partida estava de acordo com a sua opinião sobre o tipo de problemas que é possível formular: os problemas para os quais já se conhece a resolução e aqueles em que, inversamente, a resolução não é conhecida. Estava a referir-se aos problemas de formulação livre. Mas como se viu no caso da Madalena na resolução da tarefa "Caixas de Gelados" também é possível, a partir de um dado contexto, formular uma pergunta para a qual não se sabe exatamente a forma de resolver. Contrariamente, nas tarefas em que é dada a expressão numérica que resolve a situação a ser inventada, o processo de resolução passa por invocar a memória de problemas já resolvidos.

10. Considerações finais

Com este estudo procurou-se descrever e compreender o modo como alunos do 1.º ciclo de escolaridade, em particular frequentando o 3.º e 4.º anos, se envolviam na resolução de tarefas de formulação de problemas, a que processos recorriam, qual o conhecimento matemático que manifestavam e como o mobilizavam e que relações poderia haver entre os processos de formulação de problemas que os alunos utilizavam e o que eles pensavam sobre as tarefas de formulação de problemas, as suas expectativas em relação a este tipo de tarefas, o seu desempenho escolar e os seus gostos pessoais. Para responder a estas questões decidiu-se delimitar e concentrar o âmbito do conhecimento matemático envolvido na multiplicação e divisão.

Fez-se um estudo interpretativo, qualitativo na forma de estudo de casos, envolvendo quatro alunos com diferentes níveis de desempenho escolar e de ambos os sexos. Os alunos frequentavam uma turma de 3.º ano de escolaridade na altura em que se iniciou o trabalho de campo, e este prolongou-se até ao 1.º período do 4.º ano[40]. A recolha dos dados dos quatro participantes ocorreu por meio de entrevistas em profundidade, realizadas individualmente, nas quais realizavam uma tarefa de formulação de problemas dentro do tópico da multiplicação e divisão. Foram ainda recolhidos dados por meio de observação de aulas, nomeadamente rotinas e processos de cálculo para a multiplicação e divisão, e informações prestadas pela professora. As observações das aulas, as informações prestadas pela professora e algumas reflexões sobre as entrevistas foram registadas num diário de campo. As entrevistas foram videogravadas, transcritas para se proceder a uma análise de conteúdo, que se fez também aos registos no diário de campo.

Os resultados obtidos por meio da observação das aulas e as informações prestadas pela professora (sobre o desempenho dos alunos, sobre o currículo planeado, sobre idiossincrasias dos alunos, sobre práticas de sala de aula) e os resultados das análises feitas às entrevistas em profundidade e ao diário de campo permitiram um enquadramento mútuo que promoveu a validade do estudo. Também contribuiu para tal validade ter sido o próprio investigador a transcrever as entrevistas, a apurar e depurar o seu conteúdo por repetida visualização dos vídeos. Os processos de análise dos dados envolveram categorias deduzidas da literatura e outras que emergiram dos próprios dados.

Dos resultados reunidos neste estudo parece poder concluir-se que são dois os movimentos significativos para a descrição dos processos de formulação de problemas. A descrição destes processos está assente na observação da ação dos alunos na realização das tarefas, nas explicitações

[40] A última entrevista ocorreu na 1.ª semana do 2.º período, mas não se considerou que isso fosse significativo para se dizer que a recolha de dados abrangeu o 2.º período.

que fizeram e nos dois tipos de tarefas de formulação que lhes foram propostos. Os dois movimentos consistem em (A) partir de expressões numéricas para formulação de contextos e perguntas, (B) partir de contextos para formular perguntas a partir dos dados numéricos e condições enunciadas.

As expressões numéricas usadas nas tarefas de formulação que delas partiam eram muito elementares se se tiver em conta o tipo de problemas que os alunos dos 3.º e 4.º anos de escolaridade são chamados a resolver, mas foram assim escolhidas propositadamente para que a complexidade dos cálculos não enviesasse o que se pretendia saber relativamente ao conhecimento da multiplicação e divisão.

Os contextos usados nas tarefas para formulação das perguntas diferiam, assim se pensava quando foram definidos, em termos de complexidade e riqueza de dados. No contexto das caixas de pastéis pedia-se apenas uma pergunta que se resolvesse por uma multiplicação. A forma como os dados foram fornecidos tinha como objetivo verificar que tipo de propriedades da função linear seria usada pelos alunos, a que respeita à constante de proporcionalidade ou as que envolvem o isomorfismo. No contexto dos gelados o objetivo era fornecer uma riqueza de dados que permitisse observar até que ponto os alunos conseguiriam chegar na complexidade das perguntas passíveis de serem formuladas.

A maneira como, nestes dois tipos de movimento, A e B, se mobiliza o conhecimento matemático é diferente. Esta diferença pode também ser analisada à luz da teoria dos campos conceptuais de Gerard Vergnaud dada a importância que assumem e o papel que desempenham as situações e os invariantes operatórios contidos nos esquemas que permitem lidar com as situações e com as representações.

Também a um nível muito simples, este movimento da situação para a expressão de cálculo (B) e desta para a situação (A) é uma versão, embora muito elementar, do ciclo da modelação matemática. Evidentemente que a modelação matemática, dentro do que a define, lida com situações problemáticas reais, coisa que não se trata aqui. Mas pode aqui tomar-se como conceito de modelo matemático o sentido que lhe dá Greer (1992) quando apresenta a multiplicação e a divisão como modelos de situações. Evidentemente que o modelo de uma situação não é uma operação genérica, mas uma estrutura bem definida que representa uma situação (cf. Matos, 1995).

Considera-se então que, num sentido, o processo de formulação de um problema consiste em criar o modelo matemático (a expressão ou expressões de cálculo que representam a situação) colocado por uma questão extraída do contexto que explicita a situação, isto é, partir de um contexto e formular o problema que será resolvido e respondido por uma ou mais operações concretamente definidas. No sentido oposto segue o processo (de formulação) que consiste em explorar o modelo matemático já definido procurando e identificando as situações que ele pode representar.

No que respeita ao processo de formulação, estes movimentos são tão mais bem definidos ou claros quanto mais complexo for o modelo ou a situação. De facto, nas explicações sobre a origem das perguntas ou problemas, os alunos nem sempre foram capazes de distinguir com clareza se o problema tinha sido pensado a partir das operações antecipadas ou se pensavam primeiro no contexto. É natural que isso se deva à facilidade com que os dados e condições eram interpretados.

Consequentemente, pode-se a partir daqui começar a considerar os limites que restringem os resultados deste estudo e as questões que se levantam para prosseguir a investigação no sentido que ela tomou neste estudo.

A complexidade da tarefa proposta é uma dimensão a considerar no desenvolvimento dos processos formulação de problemas. Daí a questão de saber como se pode medir tal complexidade.

Ainda outra questão que se coloca quanto aos processos de formulação de problemas, tal como foram definidos neste estudo, e virá a precisar de clarificação, é a variedade de formas de apresentação (representação) dos contextos ou dos modelos. Um contexto (situação) pode ser apresentado por meio de imagens mais reais (p. ex.: fotografia) ou menos (desenhos mais ou menos fantasiados) ou representações mais ou menos identificadas com a simbologia matemática (tabelas, diagramas, gráficos,…). Consequentemente a questão tem a ver com a distinção entre o que é uma situação e o que é um modelo matemático. Talvez possam ser encontradas tarefas em que é difícil fazer esta distinção.

A investigação envolvendo a formulação de problemas tem enveredado por muitos caminhos. Umas vezes ela está ligada à resolução de problemas[41], outras vezes ela é usada para avaliar o conhecimento dos alunos, ou a sua criatividade. A investigação tem mostrado que a formulação de problemas é um ótimo instrumento para avaliação do conhecimento dos alunos e isso também se viu nesta investigação. Este estudo procurou focar-se na formulação em si, no modo como os alunos pensam na formulação, no modo como mobilizam o conhecimento, procurou a voz dos formuladores, isto é, o que eles têm a dizer sobre o assunto.

[41] A resolução de um problema implica sempre a formulação ou, pelo menos, a reformulação do problema.

Referências

Almeida, P. C. (2011). Se não sabe, por que pergunta? - as perguntas dos alunos e a interpretação de problemas. *(Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa)*. Recuperado de http://hdl.handle.net/10400.21/1302

Amado, J., & Ferreira, S. (2014). A entrevista na investigação em educação. Em J. Amado (Ed.), *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (2ª ed., pp. 207 - 232). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, J., Costa, A. P., & Crusoé, N. (2014). A técnica da análise de conteúdo. Em J. Amado (Ed.), *Manual de Investigação Qualitativa em Educação* (2ª ed., pp. 301-351). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 367–385.

Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2013). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology*, *39*(1), 59–73.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo.* (L. A. Reto, & A. Pinheiro, Trads.) Lisboa: Edições 70.

Barlow, A. T., & Drake, J. M. (2008). Assessing Understanding through problem writing. *Mathematics Teaching in Middle School*, *13*(6), 326–332.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Boavida, A. R., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Lisboa: Direção Geral de Inovação ede Desenvolvimento Curricular.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Bonotto, C. (2002). Suspension of sense-making in mathematical word problem solving: a possible remedy. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Crete: John Wiley & Sons Inc. Recuperado de http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Suspension+of+sense-making+in+mathematical+word+problem+solving:+a+possible+remedy#0

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 125–141.

Brown, S., & Walter, M. (1989). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 57–69.

Carlson, M., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58,45–75.*

Chica, C. H. (2001). Por que formular problemas?. In K. S. Smole & M. I. Diniz (Orgs) *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender Matemática,* (pp. 151-173). Porto Alegre: Artmed Editora.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *37*(3), 149–158.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 41–51.

Corte, E. De, Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. In *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (pp. 66–73). Amman, Jordan: The National Center for Human Resource Development. Recuperado de http://math.unipa.it/~grim/Jdecorte.PDF

Dante, L. R. (2010). *Formulação e resolução de problemas: teoria e prática*. São Paulo: Ática Editora.

DEB (1998). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico - 1.º Ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). Introduction: the discipline and practice of qualitative research. Em N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Edits.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (pp. 1 - 32). London: Sage Publications.

DGEBS (1990). *Reforma Educativa: Ensino Básico: Programa do 1.º Ciclo*. Lisboa: Direção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Dooren, W. Van, Bock, D. De, & Verschaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication … and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills. *Cognition and Instruction*, *28*(3), 360–381.

Ell, F. R. (2005). *Learning about multiplication: An interpretation of a transition*. Unpublished doctoral thesis, The University of Auckland.

Elliott, R., & Timulak, L. (2005). Descriptive and interpretative approaches to qualitative research. Em P. Miles, & P. Gilbert (Edits.), *Handbook of Research Methods for Clinical Health Peychology* (pp. 147-159). Oxford: Oxford University Press.

Evertson, C. M., & Green, J. L. (1986). Observation as inquiry and method. Em M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 162-213). New York: Macmillan.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1), 3–17.

Georgiadou-Kabouridis, B., & Bartzakli, M. (2009). Exploring the affect/cognition relation in problem posing situations. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 381). Thessaloniki, Greece: PME.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: a case of modelling? *Learning and Instruction*, *7*(4), 389–397.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276–295). New York: Macmillan.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learnig and Instruction*, *7*(4), 293–307.

Guerra, I. C. (2006). *Pesquisa Qualitativa e Análise de Conteúdo: Sentidos e forma de uso.* Cascais: Princípia Editora.

Hashimoto, Y. (1987). Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In J. P. Becker & T. Miwa (Eds.), Proceedings of the U.S.–Japan seminar on mathematical problem solving (pp. 94– 119). Carbondale, IL: Southern Illinois University.

Hesse-Biber, S. N., & Leavy, P. (2011). *The Practice of Qualitative Research* (2ª ed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

Jacob, L., & Willis, S. (2003). The Development of Multiplicative Thinking in Young Children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 460–467). Geelong, Australia: MERGA.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In Schoenfeld, A. H. (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kontorovich, I. Koichu, B. (2009). Towards a Comprehensive Framework of Mathematical Problem Posing, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, pp. 401-408), Thessaloniki, Greece: PME.

Kouba, V. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 159-166 http://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Lester, F. K. (1980). Research on mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 286–323). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675.

Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 103–116.

Lin, P. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 3, pp. 257–264). Bergen: Bergen University College.

Matos, J. F. (1995). *Modelação Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Miyake, N., & Norman, D. A. (1978). *To ask a question, one must know enough to know what is not known*. San Diego: University of California.

Moreira, C. D. (2007). *Teorias e Práticas de Investigação.* Lisboa: Instituto Superior de Ciências Sociais e Políticas.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 309–330.

Mulligan, J., & Wright, B. (2000). Interview-based assessment of early multiplication and division. In Nakahara, T.& Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the lnternational Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 17 -24). Hiroshima, Japan: PME.

NCTM (1980). An Agenda for Action: Recommendations for school mathematics of the 1980s. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nicolaou, A., & Philippou, G. (2007). Efficacy beliefs, problem posing, and mathematics achievement. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 308–317). Larnaca, Cyprus: ERME.

Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwel Publishers.

Pelczer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 353-360). Thessaloniki: PME.

Polya, G. (1957). *How To Solve It: A new aspect of mathematical method* (2 nd). New Jersey: Press, Princeton University.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M, & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. Em J. Hiebert, & M. Behr (Edits.), *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schwartz, J. L. (1996). *Semantic Aspects of Quantity*. *Education*. Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.7161&rep=rep1&type=pdf

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For The Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: mathematical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education, 27*, 67-72.

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 157–162.

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 9–26.

Smith, S. Z., & Smith, M. E. (2006). Assessing Elementary Understanding of Multiplication Concepts. *School Science and Mathematics*, *106*(3), 40–48.

Sriraman, B., Yaftian, N., & Lee, K. (2011). Mathematical creativity and mathematics education. In B. Sriraman & K. H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics,* (pp. 119–130). Rotterdam: Sense Publishers.

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (Eds.). *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3rd Ed). Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Stoyanova, E. (2005). Problem-posing strategies used by Years 8 and 9 students. *Australian Mathematics Teacher*, *61*(3), 6–11.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into Students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education (Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 518–525). Melbourne: MERGA.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. A. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127–174). New York: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In H. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education: Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141–161). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaun Associates.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2.3), 133–170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 41–59). New York: State University of New York.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In B. G. L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin (Ed.), *Theories of Mathematical Learning. Proceedings of a working group on theories of learning mathematics, presented at the Seventh International Congress on Mathematical Education* (pp. 219–239). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: an international perspective* (pp. 5–27). New York: Psychology Press.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167–181.

Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? *Investigações Em Ensino de Ciências*, *12*(2), 285–302.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*, 83–94.

Vilelas, J. (2009). *Investigação - O processo de construção do conhecimento.* Lisboa: Edições Sílabo.

Wyndhamn, J. A. N., & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning: A study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction, 7*(4), 361–382.

Zakaria, E., & Ngah, N. (2011). A preliminary analysis of students' problem-posing ability and its relationship to attitudes towards problem solving. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology, 3*(9), 866–870.